Lycée Lucie Aubrac - Terminale

Chapitre 3
Nombres complexes
Propriétés géométriques

Table des matières

1 Repérage des nombres complexes dans le plan

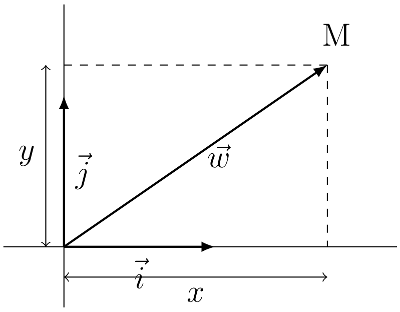
Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $\left(\mathrm{O}\,;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1.1 Affixe d'un point et affixe d'un vecteur

Définition 1

Soit M le point du plan de coordonnées $(x;y)$.

- On appelle **affixe du point M** le nombre complexe $x+iy$.
- On appelle **affixe du vecteur $\vec{w}$** l'affixe du point M tel que $\vec{w}=\overrightarrow{OM}$.



Histoire – Représentation des nombres complexes

Dès la fin du XVII$^{\text{e}}$ siècle, il semble que **Carl Friedrich Gauß** fait eu l'idée de représenter les nombres complexes dans le plan. On trouve en tout cas cette idée dans des lettres datées de 1797. Gauss ne publiera cependant rien à ce sujet et c'est en 1806 que le mathématicien suisse et amateur **Jean Robert Argand** (1768-1822) publie un traité intitulé *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires par des constructions géométriques*. Cet essai tombe toputefois assez vite dans l'oubli et les noms de **Gauß** et de **Cauchy** seront par la suite bien plus souvent associés à la représentation géométrique des nombres complexes que ne l'est celui d'**Argand**.

Jean-Robert Argand

Proposition 1

Soient A et B deux points du plan d'affixes respectives z_{A} et z_{B}.

- Le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}=z_{\mathrm{B}}-z_{\mathrm{A}}$.
- Le milieu I de [AB] a pour affixe $z_{\mathrm{I}}=\dfrac{z_{\mathrm{A}}+z_{\mathrm{B}}}{2}$.

Exemple.
Soit A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}}=2-3i$ et B le point d'affixe $z_{\mathrm{B}}=-1+5i$.
Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Solution :

$$\begin{aligned} z_{\overrightarrow{\mathrm{AB}}} &= z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}} \\ &= (-1+5i) - (2-3i) \\ &= -1+5i-2+3i \\ &= -3+8i \end{aligned}$$

Proposition 2

Soient $\vec{w_1}$ et $\vec{w_2}$ deux vecteurs du plan d'affixes respectives z_1 et z_2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.
- Le vecteur $\vec{w_1} + \vec{w_2}$ a pour affixe $z_1 + z_2$.
- Le vecteur $\lambda\vec{w_1}$ a pour affixe λz_1.

Exemple.
Soient $\vec{w_1}$ d'affixe $z_1 = 3i + 5$ et $\vec{w_2}$ d'affixe $z_2 = 1 - i$. Calculer l'affixe du vecteur $3\vec{w_1} + \vec{w_2}$.

Solution :
L'affixe de $3\vec{w_1} + \vec{w_2}$ est :

$$\begin{aligned} 3z_1 + z_2 &= 3 \times (3i+5) + (1-i) \\ &= 9i + 15 + 1 - i \\ &= 16 + 8i \end{aligned}$$

1.2 Module d'un nombre complexe

Définition 2

Soit z un nombre complexe et M le point d'affixe z.
Le **module de z** , noté $|z|$ est défini par :

$$|z| = \mathrm{OM}.$$

Proposition 3

Soient A et B deux points d'affixes z_{A} et z_{B}. Alors,

$$\mathrm{AB} = |z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}|.$$

Démonstration.
Cela découle du fait que le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ a pour affixe $z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}$. □

Proposition 4

Pour tout nombre complexe $z = x + iy$:

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

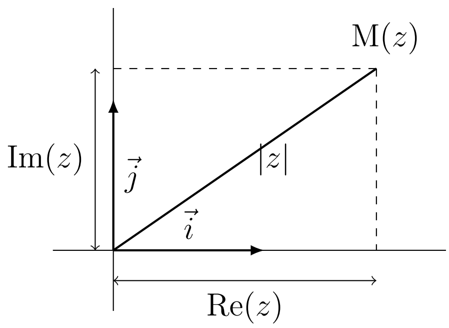
Démonstration.
Cette formule découle directement du théorème de Pythagore. □

Exemple.
Si $z = 1 - 3i$, on a $|z| = \sqrt{1^2 + (-3)^2} = \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

Proposition 5

Pour tout $z \in \mathbb{C}$:
- $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$
- $\mathrm{Im}(z) \leqslant |z|$
- $z\overline{z} = |z|^2$

Démonstration.
Les deux premiers points sont assez clairs sur le dessin ci-dessous.



Pour le troisième point, il s'agit simplement du fait que si $z = x + iy$, on a :

$$z\overline{z} = (x+iy)(x-iy) = x^2 + y^2 = |z|^2.$$

□

Proposition 6

Soient z_1 et z_2 deux nombres complexes et n un entier naturel non nul. Alors :
- $|\overline{z_1}| = |z_1|$
- $|-z_1| = |z_1|$
- $|z_1 \times z_2| = |z_1| \times |z_2|$
- $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right| = \dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ (si $z_2 \neq 0$)
- $|z^n| = |z|^n$

Démonstration.
Il suffit d'écrire les nombres complexes z_1 et z_2 sous la forme $z = x_1 + iy_1$ et $z_2 = x_2 + iy_2$ et de calculer chacun des termes afin de prouver les différentes égalités. □

Exemple.
Calculer le module de $z = \dfrac{1-i}{3+2i}$.

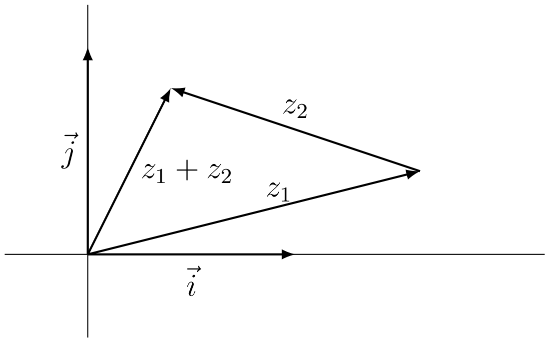
Solution :

$$|z| = \left|\frac{1-i}{3+2i}\right| = \frac{|1-i|}{|3+2i|} = \frac{\sqrt{1^2+(-1)^2}}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{13}} = \sqrt{\frac{2}{13}}$$

Proposition 7 – Inégalité triangulaire

Pour tous z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$:
$$|z_1 + z_2| \leqslant |z_1| + |z_2|.$$

Remarque.
Le nom de cette propriété est justifiée par le fait que si l'on considère trois vecteur d'affixes z_1, z_2 et $z_1 + z_2$, l'inégalité illustre l'inégalité classique entre les côtés d'un triangle.



Démonstration.
Soient z_1, $z_2 \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2| &\iff (|z_1+z_2|)^2 \leqslant (|z_1|+|z_2|)^2 \quad \text{(car la fonction carrée est strict. croiss. sur } \mathbb{R}^+\text{)}\\
&\iff |z_1+z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2\\
&\iff (z_1+z_2) \times \overline{(z_1+z_2)} \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2\\
&\iff z_1\overline{z_1} + z_1\overline{z_2} + z_2\overline{z_1} + z_2\overline{z_2} \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2\\
&\iff |z_1|^2 + 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) + |z_2|^2 \leqslant |z_1|^2 + 2|z_1||z_2| + |z_2|^2\\
&\iff 2\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leqslant 2|z_1||z_2|\\
&\iff \mathrm{Re}(z_1\overline{z_2}) \leqslant |z_1\overline{z_2}|
\end{aligned}$$

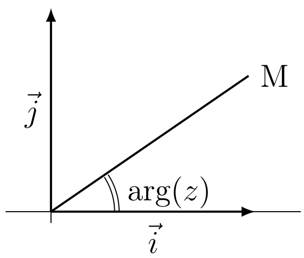
Cette dernière inégalité est toutjours vraie car pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$. □

1.3 Argument d'un nombre complexe

Définition 3

Soit z un nombre complexe non nul et M le point d'affixe z.

- Un **argument de z**, noté $\arg(z)$, est une mesure de l'angle orienté $\left(\vec{i}\,;\overrightarrow{OM}\right)$.
- Un argument d'un nombre complexe n'est pas unique.
  Plus précisément, tous les arguments de z diffèrent d'un multiple de 2π.
- On appelle **argument principal** de z l'argument appartenant à $]-\pi;\pi]$.



Exemple.
En plaçant -2 et $5i$ dans un repère, on voit que :
- $\arg(-2) = \pi$
- $\arg(5i) = \dfrac{\pi}{2}$

Proposition 8

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:
- $\arg(z) = 0\,[2\pi] \iff z \in \mathbb{R}^+$.
- $\arg(z) = \pi\,[2\pi] \iff z \in \mathbb{R}^-$.
- $\arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \iff z \in i\mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(z) > 0$.
- $\arg(z) = -\dfrac{\pi}{2}\,[2\pi] \iff z \in i\mathbb{R}$ et $\mathrm{Im}(z) < 0$.

Proposition 9

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^*$.
- $\arg(-z) = \arg(z) + \pi \;\; [2\pi]$
- $\arg(\overline{z}) = -\arg(z) \;\; [2\pi]$
- $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z') \;\; [2\pi]$

Démonstration.
- Les deux premiers points sont assez clairs en faisant un dessin.
- Le troisième point sera démontré plus tard dans le chapitre à l'aide de la forme exponentielle d'un nombre complexe).

□

Proposition 10 – (admise)

Soient A, B, C et D quatre points du plan deux à deux distincts et d'affixes respectives z_A, z_B, z_C et z_D. Alors :

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)$$

2 Forme trigonométrique d'un nombre complexe

Proposition 11

Soit $z = x + iy$. On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
On a alors les formules suivantes :

$$\begin{cases} x = r\cos(\theta) \\ y = r\sin(\theta) \end{cases}$$

Définition 4

Soit z un nombre complexe non nul. On note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
On a alors ,

$$z = r\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)$$

Il s'agit de la **forme trigonométrique de z**.

Exemples.

1. Déterminer la forme algébrique de $z = 5 \times (\cos(\pi) + i\sin(\pi))$.
2. Déterminer la forme trigonométrique de $z = 1 - i\sqrt{3}$.

Solution :

1. $z = 5 \times (-1 + i \times 0) = -5$.

2. On a $z = 1 - i\sqrt{3}$.
   On commence par déterminer $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$.
   D'une part, $|z| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$
   D'autre part, $\cos(\theta) = \dfrac{x}{r} = \dfrac{1}{2}$ et $\sin(\theta) = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-\sqrt{3}}{2}$.
   Ainsi, on voit que $\theta = -\dfrac{\pi}{3}$.
   Finalement, la forme trigonométrique de z est :

$$z = 2 \times \left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$$

Méthode – Calculer la forme trigonométrique d'un nombre complexe

- Déterminer le module r.
- Calculer $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ afin d'en déduire la valeur de θ.
- Écrire la formule trigonométrique :

$$z = r\Big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\Big)$$

3 Forme exponentielle d'un nombre complexe

Définition 5

Pour tout réel θ, on définit l'**exponentielle complexe** de θ par :

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

Proposition 12

Soit z un nombre complexe non nul. Si on note $r = |z|$ et $\theta = \arg(z)$, on a alors ,

$$z = re^{i\theta}$$

Démonstration.
La forme trigonométrique de z est $z = r(\cos(\theta) + i\sin(\theta))$.
Comme $\cos(\theta) + i\sin(\theta) = e^{i\theta}$, on en déduit directement que $z = re^{i\theta}$. □

Proposition 13

Pour tout réel θ_1 et θ_2, on a :

$$e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

Remarque.
Cette relation est identique à celle vérifiée par la fonction exponentielle réelle et justifie donc que l'on ait utilisé le nom d'exponentielle complexe ici.

Démonstration.
La propriété découle en fait des formules donnant le cosinus et le sinus d'une somme. En effet :

$$\begin{aligned} e^{i\theta_1} \times e^{i\theta_2} &= (\cos(\theta_1) + i\sin(\theta_1)) \times (\cos(\theta_2) + i\sin(\theta_2)) \\ &= \cos(\theta_1)\cos(\theta_2) - \sin(\theta_1)\sin(\theta_2) + i\big(\sin(\theta_1)\cos(\theta_2) + \cos(\theta_1)\sin(\theta_2)\big) \\ &= \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2) \\ &= e^{i(\theta_1+\theta_2)} \end{aligned}$$

□

Remarque.
La propriété précédente permet de démontrer que $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')$ (voir propriété 9)

Proposition 14 – Formule de Moivre

Pour tout réel θ et tout entier n, on a :

$$\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}.$$

Remarque.
- La forme exponentielle est à privilégier pour calculer des produits de nombres complexes.
- La forme algébrique est à privilégier pour calculer des sommes de nombres complexes.

Exemple.
Soit $z = -2 - 2i$.

1. Déterminer la forme exponentielle de z.
2. Calculer z^4.

Solution :

1. On détermine la forme exponentielle de z :
   $r = |z| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$
   $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{x}{r} = \dfrac{-2}{2\sqrt{2}} = -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin(\theta) = \dfrac{y}{r} = \dfrac{-2}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\sqrt{2}}{2} \end{cases}$ Ainsi, $\theta = -\dfrac{3\pi}{4}$ et on a donc $z = 2\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}$.

2.
$$\begin{aligned} z^4 &= \left(2\sqrt{2}e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right)^4 \\ &= \left(2\sqrt{2}\right)^4 \times \left(e^{-3i\frac{\pi}{4}}\right)^4 \\ &= 2^4 \times \left(\sqrt{2}\right)^4 \times e^{4\times -3i\frac{\pi}{4}} \\ &= 16 \times 4 \times e^{-3i\pi} \\ &= 16 \times 4 \times (-1) \\ &= -64 \end{aligned}$$

Proposition 15 – Formules d'Euler

Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, $\quad \cos(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \quad$ et $\quad \sin(\theta) = \dfrac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$

Démonstration.
Soit $\theta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} &= \frac{(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) + (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))}{2} \\ &= \frac{\cos(\theta) + i\sin(\theta) + \cos(\theta) - i\sin(\theta)}{2} \\ &= \frac{2\cos(\theta)}{2} \\ &= \cos(\theta) \end{aligned}$$

Le calcul est similaire pour prouver la deuxième égalité. □

Histoire – Exponentielle complexe

La notation i n'a pas été utilisée dès le départ.
En 1748, **Leonhard Euler** énonce la formule $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$ puis les formules qui portent aujourd'hui son nom. A noter que ces formules ont donc été découvertes avant l'interpretation géométrique des nombres complexes. Euler a en fait plutôt utilisé des considérations algébriques. Pour rappel, c'est également lui qui décida d'introduire la notation i afin d'éviter les ambiguités de la notation $\sqrt{-1}$.

Leonhard Euler

Méthode – Linéariser $\cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$

Linéariser une expression, c'est transformer une puissance en une combinaison linéaire de cosinus de la forme $\cos(nx)$.

- Utiliser les formules d'Euler
- Développer
- Simplifier et rassembler les termes afin d'utiliser de nouveau les formules d'Euler.

Exemple.
Linéariser $\cos^3(x)$.

Solution :

$$\begin{aligned}
\cos^3(x) &= \left(\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3 \\
&= \frac{(e^{ix})^3 + 3(e^{ix})^2e^{-ix} + 3e^{ix}(e^{-ix})^2 + (e^{-ix})^3}{8} \\
&= \frac{e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}}{8} \\
&= \frac{1}{4} \times \frac{e^{3ix} + e^{-3ix}}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \\
&= \frac{1}{4}\cos(3x) + \frac{3}{4}\sin(3x)
\end{aligned}$$

Remarque.
Linéraiser $cos^n(x)$ ou $\sin^n(x)$ permet par exemple d'en calculer une primitive et peut donc être utile dans les calculs d'intégrales.

4 Racines n^e de l'unité

Définition 6

On appelle **cercle unité** et on note $\mathbb{U}$, l'ensemble des nombres complexes de module 1. On a donc :

$$\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \ / \ |z| = 1\}.$$

Proposition 16

Si $z \in \mathbb{U}$ et $z' \in \mathbb{U}$, alors $\quad zz' \in \mathbb{U} \quad$ et $\quad \dfrac{z}{z'} \in \mathbb{U}$

Remarque.
On dit que $\mathbb{U}$ est stable par multiplication et par division. Il n'est en revanche pas stable par addition.

Définition 7

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle **racine n^e^ de l'unité** et on note $\mathbb{U}_n$ les solutions de l'équation $z^n = 1$.

Proposition 17

$\mathbb{U}_n$ est composé d'exactement n éléments.
De plus,

$$\mathbb{U}_n = \left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \ 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}.$$

Démonstration.

- On commence par montrer que pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$, $e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ est une racine de l'équation $z^n = 1$. En fait :

$$\begin{aligned}\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}}\right)^n &= e^{\frac{2ik\pi}{n}\times n} \text{ (d'après la formule de Moivre)} \\ &= e^{2ik\pi} \\ &= \cos(2k\pi) + i\sin(2k\pi) \\ &= 1\end{aligned}$$

.

- On va ensuite montrer que l'ensemble $\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \ 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$ possède exactement n éléments. Pour cela, on va montrer que si k et k' sont deux entiers distincts, alors $e^{\frac{2ik\pi}{n}} \neq e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$.
Par contraposée, supposons que k et k' soient des entiers tels que $e^{\frac{2ik\pi}{n}} = e^{\frac{2ik'\pi}{n}}$.
Alors $\dfrac{e^{\frac{2ik\pi}{n}}}{e^{\frac{2ik'\pi}{n}}} = 1$
Donc $e^{2i(k-k')\pi n} = 1$ Donc n divise $k - k'$.
Comme $|k - k'| \leqslant n - 1$, on en déduit que $k - k' = 0$, c'est-à-dire $k = k'$.
Ainsi, on a bien montré que l'ensemble $\left\{e^{\frac{2ik\pi}{n}}, \ 0 \leqslant k \leqslant n-1\right\}$ possède exactement n éléments.

- Finalement, on a déterminé n racines de l'équation $z^n = 1$. Comme elle est de degré n, elle ne peut pas posséder d'autres racines et on a donc

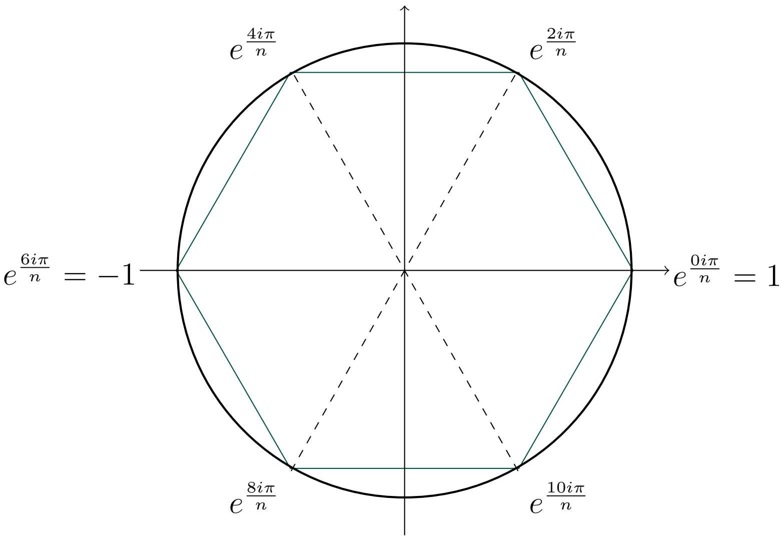
$$\mathbb{U}_n = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{n}},\ 0 \leqslant k \leqslant n-1 \right\}.$$

$\square$

Exemple.

- $\mathbb{U}_2 = \{1\,;-1\}$
- $\mathbb{U}_3 = \{1\,;j\,;j^2\}$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$
- $\mathbb{U}_4 = \{1\,;i\,;-1\,;-i\}$

Remarque.
Si $n \geqslant 3$, alors les points dont les affixes sont des racines n^{e} de l'unité forment un polygône régulier à n côtés. Par exemple, le dessin ci-dessous représente les racines de l'unité pour $n = 6$.



Savoir-faire du chapitre

- Déterminer le module et l'argument d'un nombre complexe.
- Déterminer la forme algébrique, trigonométrique et exponentielle d'un nombre complexe.
- Utiliser les formules d'Euler et de Moivre afin de d'établir des formules de trigonométrie.
- Utiliser les nombres complexes pour résoudre un problème de géométrie.

QCM d'entrainement