Nombres complexes – Équations polynomiales – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ⋆					1, 2	
Exercices ⋆⋆	3			9	3, 6, 8, 9	
Exercices ⋆⋆⋆				7, 10	4, 5, 7, 10	

Exercice 1 ⋆ [Calculer]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z^2 + 9 = 0$
2. $z^2 + 11 = 0$
3. $z^2 - 4z + 19 = 0$
4. $z^2 - 12x - 2 = 0$
5. $\dfrac{3}{z} = -\dfrac{z}{2}$
6. $\dfrac{3}{z} = -\dfrac{z}{2}$
7. $\dfrac{1}{z^2} = 3 + \dfrac{1}{z^4}$
8. $z^3 + 5z + \dfrac{4}{z}$

Exercice 2 ⋆ [Calculer]

Dans chaque cas, déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B.

1. $A(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 + 1$
   $B(x) = x^2 + 1.$
2. $A(x) = 5x^6 + x^4 - 5x^3 + x - 7$
   $B(x) = x^3 + 3x - 8.$
3. $A(x) = x^5 - 5x^3 + x^2 + 6x - 2$
   $B(x) = 3x + 1.$
4. $A(x) = x^7$
   $B(x) = 2x - 1.$

Exercice 3 ⋆⋆ [Chercher, Calculer]

Soient un entier $n \geqslant 2$, $a \in \mathbb{R}^*$, $b \in \mathbb{R}$.
Déterminer le reste de la division euclidienne de x^n par $ax + b$.

Exercice 4 ⋆⋆⋆ [Calculer]

Factoriser au maximum les polynômes suivants dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

1. $x^4 + 1$
2. $x^3 - 2$
3. $(x^2 - x + 1)^2 + 1$
4. $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 9$

Exercice 5 ⋆⋆⋆ [Calculer]

On considère le polynôme P suivant :

$$\mathrm{P}(z) = z^4 - 8z^3 + 41z^2 - 128z + 400.$$

Factoriser au maximum le polynôme P dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$.

Indication : on pourra commencer par rechercher une racine de P qui soit imaginaire pure.

Exercice 6 ⋆⋆ [Calculer]

Résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{C} \setminus \{2\}$:

$$\left(\frac{1-2z}{z-2}\right)^4 = 1.$$

Exercice 7 ⋆⋆⋆ [Calculer, Raisonner]

L'objectif de cet exercice est de s'intéresser aux équations symétriques de degré 4 à coefficients réels, c'est-à-dire un polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par :

$$\mathrm{P}(z) = az^4 + bz^3 + cz^2 + bz + a,$$

où a, b et c sont trois réels tels que $a \neq 0$.

1. Montrer qu'un nombre complexe u est une racine dans $\mathbb{C}$ du polynôme P si, et seulement si, u est racine d'un polynôme Q de la forme

$$\mathrm{Q}(z) = z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \alpha z + 1,$$

   où α et β sont deux réels qu'on exprimera en fonction de a, b et c.
2. On pose, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$,

$$Z = z + \frac{1}{z}.$$

   Exprimer $z^2 + \dfrac{1}{z^2}$ en fonction de Z puis montrer que $\mathrm{Q}(z) = 0$ si, et seulement si, Z est solution d'une équation du second degré à coefficients réels.
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$z^4 + 2z^3 + 3z^2 + 2z + 1 = 0.$$

Exercice 8 ⋆⋆ [Calculer]

On considère l'équation $x^2 = x + 1$.

1. Justifier que cette équation admet deux racines que l'on notera a et b.
2. Montrer que $a^3 + b^3 = 4$.

Exercice 9 ⋆⋆ [Calculer, Raisonner]

Soit p un nombre premier et a, b, c des entiers tels que a n'est pas divisible par p.
Montrer que l'équation $ax^2 + bx + c \equiv 0\,[p]$ (d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$) admet des solutions si, et seulement si, il existe $\delta \in \mathbb{Z}$ tel que $b^2 - 4ac = \delta^2\,[p]$.

Exercice 10 ⋆⋆⋆ [Raisonner, Calculer]

L'objectif est de démontrer le résultat suivant connu sous le nom d' « interpolation de Lagrange » :

Proposition

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tels que pour tout $k \neq l$, $x_k \neq x_l$.
Soit $(y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que,
pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $P(x_k) = y_k$

Preuve de l'existence

On considère $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que pour tout $k \neq l$, $x_k \neq x_l$.
On considère par ailleurs $(y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
Pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, on définit le polynôme $L_i(x) = \displaystyle\prod_{\substack{j=0 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j}$.

1. Montrer que pour tout $i \in \{0, \dots, n\}$, $L_i(x_i) = 1$.
2. Montrer que pour tout $j \neq i$, $L_i(x_j) = 0$.
3. On pose $L(x) = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} y_i L_i(x)$.
   (a) Montrer que $L \in \mathbb{R}_n[X]$.
   (b) Montrer que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $L(x_k) = y_k$.
   (c) Conclure.

Preuve de l'unicité

Soit $(x_0, x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que pour tout $k \neq l$, $x_k \neq x_l$. Soit $(y_0, y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$.
On suppose qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tels que pour tout $k \in \{0, \dots, n\}$, $P(x_k) = y_k$ et $Q(x_k) = y_k$.

4. Montrer que le polynôme $P - Q$ possède au moins $n + 1$ racines.
5. En déduire que $P = Q$.

Exemple d'application

6. On considère le cas $n = 3$ avec $(x_0, x_1, x_2, x_3) = (-1\,;3\,;4\,;6)$ et $(y_0, y_1, y_2, y_3) = (2\,;2\,;-3\,;0)$.
   Calculer les polynômes L_i et le polynôme L apparaissant dans la preuve de l'existence (il n'est pas nécessaire de simplifier les calculs).