Lycée Lucie Aubrac - Terminale

Chapitre 2
Nombres complexes
Équations polynomiales

Table des matières

1 Équations du second degré à coefficients réels

Dans cette partie, a, b et c désignent des réels avec $a \neq 0$ et z un nombre complexe. On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $az^2 + bz + c = 0$.

Définition 1

On appelle discriminant du trinôme $az^2 + bz + c$ le nombre réel Δ défini par :

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Proposition 1

On considère l'équation $az^2 + bz + c = 0$ (d'inconnue z) avec a, b, $c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$.

1. Si $\Delta > 0$, alors l'équation admet deux solutions réelles distinctes :
$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$
2. Si $\Delta = 0$, alors l'équation admet une unique solution réelle : $z_0 = \dfrac{-b}{2a}$.
3. Si $\Delta < 0$, alors l'équation admet deux solutions complexes conjuguées :
$$z_1 = \frac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$$

Démonstration.
Soient a, b, $c \in \mathbb{R}$ avec $a \neq 0$. Soit $z \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}
az^2 + bz + c &= a\left(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\underbrace{z^2 + 2 \times \frac{b}{2a}z + \left(\frac{b}{2a}\right)^2}_{\left(z+\frac{b}{2a}\right)^2} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}\right) \\
&= a\left(\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, $az^2 + bz + c = 0 \iff \left(z + \dfrac{b}{2a}\right)^2 - \dfrac{\Delta}{4a^2} = 0 \quad (\star)$.

- Si $\Delta > 0$, on peut écrire $\Delta = \left(\sqrt{\Delta}\right)^2$. Ainsi l'équation $(\star)$ devient :

$$\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right) = 0$$
$$\iff \left(z - \left(-\frac{b}{2a} + \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right)\left(z - \left(-\frac{b}{2a} - \frac{\sqrt{\Delta}}{2a}\right)\right) = 0$$

On pose $z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.

On a donc $az^2 + bz + c = 0 \iff z = z_1 \text{ ou } z = z_2$.

- Si $\Delta = 0$, l'équation $(\star)$ devient :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$$

On pose $z_0 = -\dfrac{b}{2a}$.

On a donc $az^2 + bz + c = 0 \iff z = z_0$.

- Si $\Delta < 0$, alors $-\Delta > 0$ et $\left(\dfrac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = -\dfrac{-\Delta}{4a^2} = \dfrac{\Delta}{4a^2}$.
Ainsi, l'équation $(\star)$ devient :

$$\left(z + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)^2 = 0$$
$$\left(z + \frac{b}{2a} - \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right)\left(z + \frac{b}{2a} + \frac{i\sqrt{-\Delta}}{2a}\right) = 0$$

On pose $z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

On a donc $az^2 + bz + c = 0 \iff z = z_1 \text{ ou } z = z_2$.

$\square$

Exemple.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.

Solution :
$\Delta = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \times 1 \times 1 = -3 < 0$.
L'équation admet donc deux solutions complexes :
$z_1 = \dfrac{-1 - i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2 = \dfrac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$.

2 Divisibilité dans l'ensemble des polynômes

2.1 Définition de l'ensemble des polynômes $\mathbb{K}[X]$

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2

Un polynôme sur $\mathbb{K}$ est une fonction $P : \mathbb{K} \longrightarrow \mathbb{K}$ telle qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ et $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{K}^n$ avec $a_n \neq 0$ et tels que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{K}, \quad P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k.$$

L'entier n est appelé degré de P et noté $\deg(P)$.

Remarque.
Si P est un polynôme sur $\mathbb{R}$ alors on peut le considérer comme un polynôme sur $\mathbb{C}$ car les coefficients a_k appartiennent à $\mathbb{C}$. La réciproque est en revanche fausse.

Définition 3

- L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.
- L'ensemble des polynômes sur $\mathbb{K}$ de degré inférieur ou égal à n est noté $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque.
D'après la remarque précédente, on a $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Exemple.

- Si $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $P(x) = x^4 - 5x + 1$, on a $P \in \mathbb{R}_4[X]$, $P \in \mathbb{R}_5[X]$ mais $P \notin \mathbb{R}_3[X]$.
- Si $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est la fonction définie par $P(x) = x^3 - ix^2 + 3i$, on a $P \in \mathbb{C}[X]$ mais $P \notin \mathbb{R}[X]$.

2.2 Relation de divisibilité entre polynômes

Définition 4

Soient P, $Q \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P **divise** Q dans $\mathbb{K}[X]$ lorsqu'il existe $S \in \mathbb{K}[X]$ tel que $Q = PS$. On dit aussi que P est un **diviseur** de Q et que Q est un **multiple** de P. On note $P|Q$.

Exemple.
Si $P(x) = x - 1$ et $Q(x) = x^2 - 1$ alors P divise Q car, pour tout x, $\quad x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$

Proposition 2

Soient P, Q, $R \in \mathbb{K}[X]$.
Si $P|Q$ et $Q|R$, alors $P|R$.

Proposition 3

Soient P, Q, $R \in \mathbb{K}[X]$ tels que $P|Q$ et $P|R$.
- Pour tous m, $n \in K$, $P|(mQ + nR)$.
- En particulier, $P|(Q + R)$ et $P|(Q - R)$.

Démonstration.
La preuve de ces résultats est identique à celle des propriétés établies dans $\mathbb{Z}$. □

2.3 Division euclidienne de polynômes

Proposition 4 – (admise)

Soient $A \in \mathbb{K}[X]$ et $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0_{\mathbb{K}[X]}\}$.
Il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X]$ tels que :

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \quad \text{et} \\ \deg(R) < \deg(B) \end{cases}$$

Remarque.
La condition $B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ signifie que B n'est pas le polynôme nul.

Exemples.
Effectuer la division euclidienne de A par B dans les cas suivants :

1. $A(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x + 3$ et $B(x) = x$
2. $A(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x + 3$ et $B(x) = x^2$
3. $A(x) = x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x + 3$ et $B(x) = x^2 + x + 1$

Solution :

1. $A(x) = x(x^3 + 3x^2 + x - 5) + 3$.
   Ainsi $Q(x) = x^3 + 3x^2 + x - 5$ et $R(x) = 3$ (avec $\deg(R) < \deg(B)$).
2. $A(x) = x^2(x^2 + 3x + 1) - 5x + 3$.
   Ainsi $Q(x) = x^2 + 3x + 1$ et $R(x) = -5x + 3$ (avec $\deg(R) < \deg(B)$).
3. On pose la division euclidienne comme ci-dessous, en ordonnant les polynômes selon les puissances décroissantes de x.

$$
\begin{array}{rl|l}
 & x^4 + 3x^3 + x^2 - 5x + 3 & x^2 + x + 1 \\ \cline{3-3}
- & x^4 \ + x^3 \ + x^2 & x^2 + 2x - 2 \\ \cline{1-2}
 & 2x^3 \qquad - 5x + 3 & \\
- & 2x^3 + 2x^2 + 2x & \\ \cline{1-2}
 & -2x^2 - 7x + 3 & \\
- & -2x^2 - 2x - 2 & \\ \cline{1-2}
 & -5x + 5 &
\end{array}
$$

Ainsi, on a $A(x) = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x - 2) + (-5x + 5)$.
Par conséquent, $Q(x) = x^2 + 2x - 2$ et $R(x) = -5x + 5$ (avec $\deg(R) < \deg(B)$).

3 Application à l'étude des racines

3.1 Racines d'un polynôme

Définition 5

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que $a \in \mathbb{C}$ est une racine de P si $P(a) = 0$.

Remarque.
Même si $P \in \mathbb{R}[X]$, P peut admettre des racines complexes non réelles. C'est par exemple le cas de polynômes du second degré lorsque $\Delta < 0$.

Proposition 5

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Si a une racine de P alors $\overline{a}$ est aussi une racine de P.

Démonstration.
$P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n} \in \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $\quad P(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

On va montrer que $\overline{a}$ est une racine.

$$P\left(\overline{a}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a}^k = \sum_{k=0}^{n} a_k \overline{a^k} = \sum_{k=0}^{n} \overline{a_k a^k} = \overline{\sum_{k=0}^{n} a_k a^k} = \overline{P(a)} = 0 \ \ \text{(car } a \text{ est une racine de } P\text{)}$$

$\square$

Remarque.
La condition $P \in \mathbb{R}[X]$ est essentielle. La Proposition devient fausse si $P \in \mathbb{C}[X]$.
Il suffit de considérer par exemple le polynôme $P(X) = (X - i)(X - 1)$.

3.2 Existence de racines et nombre de racines

Proposition 6 – Théorème de D'Alembert-Gauss (admis)

Tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ non constant admet au moins une racine complexe.

Histoire – Théorème de d'Alembert-Gauss

Au XVIIIe siècle, l'existence de racines complexes était globalement admise mais cela n'a été démontrée rigoureusement qu'au début du XIXe siècle. Ce théorème est également connu sous le nom de « théorème fondamental de l'algèbre ». Il s'agit là d'une situation que l'on peut aujourd'hui estimer paradoxale car toutes les démonstrations connues utilisent des arguments analytiques (d'analyse complexe par exemple). Cependant, le paradoxe n'est qu'apparent car le nom de « théorème fondamental de l'algèbre » est apparu à une époque où l'algèbre désignait la théorie des équations. De nos jours, ce terme désigne plutôt la discipline qui s'intéresse aux structures et aux opérations sur les ensembles.

Proposition 7

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$. Alors

$$P(a) = 0 \Longleftrightarrow \text{Il existe } Q \in \mathbb{K}[X] \text{ tel que pour tout } x \in \mathbb{K},\ P(x) = (x-a)Q(x)$$

Démonstration.

- $\Longleftarrow$ Supposons qu'il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $P(x) = (x-a)Q(x)$.
  Alors, $P(a) = (a-a)Q(a) = 0$.
- $\Longrightarrow$ Réciproquement, supposons que $P(a) = 0$.
  On effectue la division euclidienne de P par $x - a$.
  Ainsi, il existe des polynômes Q et R tels que

$$\begin{cases} P(x) = (x-a)Q(x) + R(x) \quad (\star) \\ \quad \text{et} \\ \deg(R) < 1 \end{cases}$$

  Par conséquent, R est un polynôme constant. On note c cette constante.
  En évaluant l'égalité $(\star)$ pour $x = a$, on obtient

$$\begin{aligned} & P(a) = (x-a)Q(a) + c \\ \Longleftrightarrow\ & 0 = 0 + c \\ \Longleftrightarrow\ & 0 = c \end{aligned}$$

  Finalement, pour tout $x \in \mathbb{K}$, $R(x) = 0$ et donc $P(x) = (x-a)Q(x)$.

□

Exemple.
On considère le polynôme $P(x) = x^3 - 1$.
Montrer que $(x-1)$ divise P puis établir la factorisation de P par $x - 1$.

Solution :
$P(1) = 1^3 - 1 = 0$. Ainsi, 1 est une racine de P donc $x - 1$ divise P.
On effectue la division euclidienne de P par $x - 1$ et on trouve :

$$P(x) = (x-1)(x^2 + x + 1).$$

Proposition 8

Pour tout $n \geqslant 1$, pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, P admet au plus n racines.

Démonstration.
On démontre par récurrence que la propriété $\mathcal{H}(n)$: « Pour tout $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré n, P admet au plus n racines » est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

- Initialisation : Si P est un polynôme de degré 1, $P(x) = ax + b \quad (\text{avec } a \neq 0)$.
  Par conséquent, $-\dfrac{b}{a}$ est l'unique racine de P et donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
- Hérédité : Supposons que $\mathcal{H}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$. Montrons qu'alors $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$. On va montrer que P admet au plus $n+1$ racines.
  En fait, on peut supposer que P admet une racine (car sinon il n'y alors rien à démontrer). On note a cette racine.
  D'après la Proposition 7, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(x) = (x-a)Q(x)$.
  En utilisant la règle du produit nul, on voit que l'ensemble des racines de P est constitué de l'ensemble des racines de Q auquel on ajoute a.
  On a de plus $\deg(Q) = n$ et donc, d'après $\mathcal{H}(n)$, Q admet au plus n racines.
  Finalement, on en déduit que P admet au plus $n+1$ racines et donc que $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

□

3.3 Factorisation de polynômes

3.3.1 Factorisation dans $\mathbb{C}[X]$

Proposition 9

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Il existe $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$ tels que pour tout x,
$P(x) = a \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$.

Remarque.

- a est le coefficient dominant de P.
- Les nombres x_k ne sont pas nécessairement deux à deux distincts.
- On peut aussi utiliser ce résultat si $P \in \mathbb{R}[X]$ car $\mathbb{R}[X] \subset \mathbb{C}[X]$.

Démonstration.
On démontre par récurrence que la propriété $\mathcal{H}(n)$: « Pour tout $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré n, il existe $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$ tels que pour tout x, $P(x) = a \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$ » est vraie pour tout entier $n \geqslant 1$.

- Initialisation : Si P est un polynôme de degré 1, $P(x) = ax + b \quad (\text{avec } a \neq 0)$.
  En posant $x_1 = -\dfrac{b}{a}$, on a $P(x) = a(x - x_1)$ et donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.
- Hérédité : Supposons que $\mathcal{H}(n)$ soit vraie pour un certain entier $n \geqslant 1$.
  Montrons qu'alors $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.
  Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ de degré $n+1$.

D'après le théorème de D'Alembert-Gauss, P admet une racine complexe (on la note x_{n+1}). De plus, d'après la Proposition 7, il existe $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(x) = (x - x_{n+1})Q(x)$.
D'après l'hypothèse de récurrence, comme $\deg(Q) = n$, il existe $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$ tels que $Q(x) = a \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$.
Par conséquent, on a

$$\begin{aligned} P(x) &= (x - x_{n+1})Q(x) \\ &= (x - x_{n+1}) \times a \prod_{k=1}^{n} (x - x_k) \\ &= a \prod_{k=1}^{n+1} (x - x_k) \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que $\mathcal{H}(n+1)$ est vraie.

□

3.3.2 Factorisation dans $\mathbb{R}[X]$

Proposition 10

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Il existe $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$, il existe $s_1, t_1, s_2, t_2, \ldots s_l, t_l \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}$ tels que pour tout x, $P(x) = a \prod_{k=1}^{r} (x - x_k) \times \prod_{k=1}^{l} (x^2 + s_k x + t_k)$ où les polynômes $x^2 + s_k x + t_k$ sont sans racines réelles, c'est-à-dire que $s_k^2 - 4t_k < 0$.

Démonstration.
On sait, d'après la Proposition 10 qu'il existe $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}$ tels que :

$$\text{Pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = a \prod_{k=1}^{n} (x - x_k).$$

Quitte à permuter les x_i, on peut supposer que $x_1, x_2, \ldots, x_r \in \mathbb{R}$ et que $x_{r+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.
Par conséquent, on a $P(x) = a \prod_{k=1}^{r} (x - x_k) \times Q(x)$ où Q admet pour racines $x_{r+1}, \ldots, x_n \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et, *a priori*, $Q \in \mathbb{C}[X]$.
En fait, comme les polynômes $a \prod_{k=1}^{r} (x - x_k)$ et $P(x)$ sont à coefficients réels, il en est de même pour $Q(x)$ (cela découle directement de l'unicité de la division euclidienne dans $\mathbb{R}[X]$).

Par ailleurs, d'après la Proposition 5, comme x_{r+1} est une racine de Q, $\overline{x_{r+1}}$ est également une racine de Q. Sachant que $x_{r+1} \neq \overline{x_{r+1}}$, Q est donc divisible par $(x - x_{r+1})(x - \overline{x_{r+1}})$.
Or,

$$\begin{aligned} (x - x_{r+1})(x - \overline{x_{r+1}}) &= x^2 - (x_{r+1} + \overline{x_{r+1}})x + x_{r+1}\overline{x_{r+1}} \\ &= x^2 - 2\mathrm{Re}(x_{r+1})x + (\mathrm{Re}(x_{r+1}))^2 + (\mathrm{Im}(x_{r+1}))^2 \end{aligned}$$

Cela prouve donc que $(x - x_{r+1})(x - \overline{x_{r+1}})$ est un polynôme à coefficient réel. Il existe donc des réels s_1 et t_1 tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x - x_{r+1})(x - \overline{x_{r+1}}) = x^2 + s_1 x + t_1$

Ainsi, il existe $Q' \in \mathbb{R}[X]$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) = (x^2 + s_1x + t_1)Q'(x)$ et les racines de Q' sont les racines de Q auxquelles on a enlevé x_{r+1} et $\overline{x_{r+1}}$.
En répétant le procédé avec Q', on voit que l'on pourra factoriser Q en produit de polynômes réels du second degré.
Finalement, on obtiendra une factorisation de P de la forme suivante :

$$P(x) = a\prod_{k=1}^{r}(x - x_k) \times \prod_{k=1}^{l}(x^2 + s_kx + t_k)$$

□

Exemple.
Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ le polynôme $P(x) = x^4 - 1$.

Solution :
P admet les quatre racines suivantes : $1, -1, i, -i$.
Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{C}$, $P(x) = (x-1)(x+1)(x-i)(x+i)$ (factorisation dans $\mathbb{C}[X]$)
Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-1)(x+1)(x^2+1)$ (factorisation dans $\mathbb{R}[X]$).

3.4 Relations entre coefficients et racines

On rappelle les relations entre coefficients et racines pour un polynôme du second degré. L'objectif est ensuite de généraliser cette propriété au cas des polynômes de degré supérieur.

Proposition 11

Si $P(x) = ax^2 + bx + c$ avec x_1 et x_2 ses racines. Alors,

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= -\frac{b}{a} \\ x_1x_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}$$

Démonstration.
Soit $P(x) = ax^2 + bx + c$.
Comme x_1 et x_2 sont les racines de P, on sait que P se factorise de la façon suivante : $P(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$.
En développant, on obtient

$$\begin{aligned} P(x) &= a\big(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2\big) \\ &= ax^2 - a(x_1 + x_2)x + ax_1x_2. \end{aligned}$$

Ainsi, en identifiant les coefficients, on obtient

$$\left\{\begin{array}{lcl} -a\big(x_1 + x_2\big) & = & b \\ \text{et} & & \\ ax_1x_2 & = & c \end{array}\right.$$

Par conséquent,

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_1 + x_2 & = & -\frac{b}{a} \\ \text{et} & & \\ x_1x_2 & = & \frac{c}{a} \end{array}\right.$$

□

Définition 6

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(x) = a \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$ avec $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{C}$ les racines de P. On définit les fonctions symétriques élémentaires des racines de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} x_k \\
\sigma_2 &= \sum_{1 \leqslant k < l \leqslant n} x_k x_l \\
&\vdots \\
\sigma_k &= \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_s \leqslant n} x_{k_1} x_{k_2} \ldots x_{k_s} \\
&\vdots \\
\sigma_n &= x_1 x_2 \ldots x_n.
\end{aligned}$$

Exemple.
Si $P(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$, alors :

$$\begin{aligned}
\sigma_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\
\sigma_2 &= x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4 \\
\sigma_3 &= x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + x_2x_3x_4 \\
\sigma_4 &= x_1x_2x_3x_4.
\end{aligned}$$

Proposition 12 – Relation entre coefficients et racines

Soit $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P(x) = a_n \prod_{k=1}^{n} (x - x_k)$ avec $x_1, \ldots x_n \in \mathbb{C}$ les racines de P. On a alors, pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\sigma_k = (-1)^k \times \frac{a_{n-k}}{a_n}.$$

Remarque.
En particulier,

- (pour $k = 1$) $x_1 + x_2 \ldots + x_n = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$
- (pour $k = n$) $x_1 x_2 \ldots x_n = (-1)^n \times \dfrac{a_0}{a_n}$

Démonstration.
La démonstration s'effectue par récurrence et consiste, comme dans la preuve de la Proposition 11, à développer l'expression $a_n(x - x_1) \ldots (x - x_n)$ puis à identifier le coefficient devant x^k. □

Savoir-faire du chapitre

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ une équation de degré deux à coefficients réels.
- Effectuer une division euclidienne de polynômes.
- Factoriser dans $\mathbb{C}$ un polynôme dont une racine est connue.
- Factoriser dans $\mathbb{C}[X]$ ou $\mathbb{R}[X]$ des polynômes simples.
- Connaître et utiliser les relations entre coefficients et racines.

QCM d'entrainement