Nombres complexes – Propriétés algébriques – Exercices

	Chercher	Modéliser	Représenter	Raisonner	Calculer	Comm.
Exercices ⋆				16	1, 2, 3, 8, 9, 10, 11, 14, 19, 20, 21, 25	
Exercices ⋆⋆	5, 6		12	17, 18	4, 6, 7, 13, 15, 18, 22	17, 18
Exercices ⋆⋆⋆	23, 24, 26, 27, 28	23		24, 26, 27, 30	27, 28, 30	24, 26, 28, 29, 30

Exercice 1 ⋆ [Calculer]

Déterminer la partie réelle et la partie imaginaire des nombres complexes suivants :

1. $z = 3 + 2i$
2. $z = 1 - i$
3. $z = 5$
4. $z = i$

Exercice 2 ⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = (1 + i) + (2 + i)$
2. $z = 3 + 2i - i - 1$
3. $z = (4 + 5i) - (1 - i)$
4. $z = 2i - \left(-\frac{1}{2}i - 1\right) + 2 + i$

Exercice 3 ⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = i(1 - 2i)$
2. $z = (1 + i)(2 + i)$
3. $z = -(3 + i)(-1 - 2i)$
4. $z = 2\left(-\frac{1}{2}i - 1\right)\left(\frac{3}{7} + \frac{4}{5}i\right)$

Exercice 4 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = (2 + 2i)^2$
2. $z = i(1 - i)^2$
3. $z = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\sqrt{2}\right)\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{5}\right)$
4. $z = \left(\frac{3}{7} + \frac{4}{5}i\right)^3$

Exercice 5 ⋆⋆ [Chercher]

Déterminer la forme algébrique du nombre complexe suivant :

$$z = i^{2021} + i^{2022} + i^{2023} + i^{2024}.$$

Exercice 6 ⋆⋆ [Chercher, Calculer]

On note $j = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

1. Montrer que j est solution de l'équation $x^2 + x + 1 = 0$.
2. Montrer que j est solution de l'équation $x^3 = 1$.
3. En déduire la forme algébrique de j^{2021}.

Exercice 7 ⋆⋆ [Calculer]

Pour chaque question, déterminer les couples de nombres réels $(a\,;b)$ vérifiant l'égalité.

1. $1 + a + i = 2 + (3b + 1)i$
2. $2 + 3a + i(5b + 1 + b^2) = 1 + ia$
3. $ab + 1 + i = i(a + b)$
4. $ab - 2 + i = 1 + i(a + b)$

Exercice 8 ⋆ [Calculer]

Soit $a \in \mathbb{R}$ et soit $z = 3a^2 - 1 - i(a + 5)$

1. Quelles sont les valeurs de a telles que $z \in \mathbb{R}$?
2. Quelles sont les valeurs de a telles que $z \in i\mathbb{R}$?

Exercice 9 ⋆ [Calculer]

Déterminer le conjugué des nombres complexes suivants :

1. $z = 1 + i$
2. $z = -3 - 2i$
3. $z = 2i$
4. $z = i - 1$

Exercice 10 ⋆ [Calculer]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $z + 3i = z - 3i$
2. $\overline{z} + 3z = 1 - z$
3. $2\overline{z} - z = 3 + iz$
4. $\overline{3z} + 2i - 1 = i - 2z$
5. $\overline{z} = 2 - z$
6. $\overline{z} = 2i - z$
7. $\overline{z} = 3i + z$

Exercice 11 ⋆ [Calculer]

Résoudre dans $\mathbb{C}$ les système suivants :

1. $\begin{cases} z_1 + z_2 & = & 3i \\ 2z_1 - 3z_2 & = & 5 \end{cases}$
2. $\begin{cases} z_1 + 5z_2 & = & i \\ 2\overline{z_1} - 3\overline{z_2} & = & 1 \end{cases}$
3. $\begin{cases} iz_1 + 5z_2 & = & 2 \\ \overline{z_1} - 3i\overline{z_2} & = & i \end{cases}$
4. $\begin{cases} z_1 + z_2 & = & 1 \\ 4z_1 - 3i\overline{z_2} & = & 4 \end{cases}$

Exercice 12 ⋆⋆ [Représenter]

Écrire une fonction algorithmique en langage Python qui demande, en entrée, la partie réelle et la partie imaginaire d'un nombre complexe z et qui retourne, en sortie, la valeur de zz.

Exercice 13 ⋆⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = \dfrac{1}{1 + i}$
2. $z = \dfrac{3 + i}{5 + 2i}$
3. $z = -\dfrac{5i}{7 - 2i}$
4. $z = \dfrac{5 + 4i}{3 - 2i}$

Exercice 14 ⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = \overline{\overline{1-3i}}$
2. $z = \overline{(1+i)^2}$
3. $z = \overline{(1+i)\overline{(5+7i)}}$
4. $z = \overline{\left(\dfrac{2-i}{1+2i}\right)}$
5. $z = \dfrac{\overline{5+4i}}{\overline{3-2i}}$

   Indication pour la question 5 :
   la forme algébrique de $\dfrac{5+4i}{3-2i}$ a déjà été calculée dans l'exercice .

Exercice 15 ⋆⋆ [Calculer]

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, le nombre $\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{\overline{z}}$ est un nombre réel.

Exercice 16 ⋆ [Raisonner]

La proposition suivante est-elle vraie ou fausse ? Justifier
Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{3+iz} = 3-iz$.

Exercice 17 ⋆⋆ [Raisonner, Communiquer]

Indiquer si les propositions suivantes sont vraies ou fausses en justifiant.

1. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $z' \in \mathbb{C}^*$ tel que $z' = \dfrac{1}{z}$.
2. Il existe $z \in \mathbb{C}^*$, tel que pour tout $z' \in \mathbb{C}^*$ tel que $z' = \dfrac{1}{z}$.
3. Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe $z' \in \mathbb{C}$ tel que $z' = \dfrac{1}{z}$.
4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$, il existe $z' \in \mathbb{C}^*$ tel que $z' = \dfrac{1}{z}$.

Exercice 18 ⋆⋆ [Raisonner, Communiquer, Calculer]

Soit $n \geqslant 2$ et soient $a_0, a_1, \dots a_n$ des nombres réels (avec $a_n \neq 0$).
Soit f la fonction polynôme définie par $f(x) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k x^k$.

1. Soit $z \in \mathbb{C}$
   Montrer que si $f(z) = 0$, alors $f(\overline{z}) = 0$.
2. En voyant ce résultat, une personne tient le raisonnement suivant : « Autrement dit, à chaque fois que z est une racine de f, $\overline{z}$ est également une racine de f. Cela signifie que toute fonction polynôme à coefficients réels de degré supérieur à deux admet un nombre pair de racines. »
   Qu'en pensez-vous ?

Exercice 19 ⋆ [Calculer]

Sans calculatrice, déterminer les coefficients binomiaux suivants :

$$\binom{3}{2};\quad \binom{5}{3};\quad \binom{7}{3};\quad \binom{21}{2}$$

Exercice 20 ⋆ [Calculer]

Sans calculatrice, déterminer tous les coefficients binomiaux de la forme $\dbinom{10}{k}$ où k est un entier compris entre 0 et 10.

Exercice 21 ⋆ [Calculer]

À l'aide de la calculatrice, déterminer un ordre de grandeur de $\dbinom{74}{35}$.

Exercice 22 ⋆⋆ [Calculer]

Montrer que pour tout $n \geqslant 1$ et pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\binom{n-1}{k-1} = \frac{k}{n}\binom{n}{k}.$$

Exercice 23 ⋆⋆⋆ [Chercher, Modéliser]

Démontrer, en dénombrant un ensemble bien choisi, que pour tout $n \geqslant 1$,

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Exercice 24 ⋆⋆⋆ [Raisonner, Communiquer, Chercher]

Montrer que pour tout $p \geqslant 1$ et pour tout $n \geqslant p$,

$$\binom{n+1}{p+1} = \sum_{k=p}^{n}\binom{k}{p}.$$

Exercice 25 ⋆ [Calculer]

Déterminer la forme algébrique des nombres complexes suivants :

1. $z = (1+i)^3$
2. $z = (5-2i)^3$
3. $z = (1+3i)^4$
4. $z = (-i-1)^6$

Exercice 26 ⋆⋆⋆ [Raisonner, Chercher, Communiquer]

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ vérifiant les trois propriétés suivantes :

$$\begin{cases} \text{Pour tout } z \in \mathbb{R},\ f(z) = z \\ \text{Pour tous } z, z' \in \mathbb{C},\ f(z+z') = f(z) + f(z') \\ \text{Pour tous } z, z' \in \mathbb{C},\ f(zz') = f(z)f(z') \end{cases}$$

Exercice 27 ⋆⋆⋆ [Raisonner, Calculer, Chercher]

On souhaite démontrer en utilisant la technique d'analyse-synthèse que tout nombre complexe admet une racine carrée complexe. Autrement dit, on veut démontrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = \alpha$.
On considère un nombre complexe $\alpha = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

1. Analyse :
   Soit $z = x + iy$ (avec $x, y \in \mathbb{R}$) tel que $z^2 = \alpha$.
   (a) Montrer que x et y vérifient alors le système suivant :
   $$\begin{cases} x^2 - y^2 &= a \\ 2xy &= b \\ x^2 + y^2 &= \sqrt{a^2 + b^2} \end{cases}$$
   (b) En déduire une expression possible de x et de y en fonction de a et b (on pourra distinguer les cas où $b \geqslant 0$ et $b < 0$).
2. Synthèse :
   Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, il existe $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = \alpha$.
3. A-t-on montré que le nombre z trouvé à la question 2 est le seul qui vérifie $z^2 = \alpha$? Justifier.
4. Dans chaque cas ci-dessous, déterminer un nombre complexe z tel que $z^2 = \alpha$.
   (a) $\alpha = -5$
   (b) $\alpha = 3i$
   (c) $\alpha = 2 + 5i$

Exercice 28 ⋆⋆⋆ [Calculer, Chercher, Communiquer]

L'objectif de l'exercice est de démontrer qu'il existe une infinité de couples d'entiers naturels $(x\,;y)$ tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.

1. Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, il existe des entiers x_n et y_n tels que $\left(3+2\sqrt{2}\right)^n = x_n + \sqrt{2}y_n$.
2. Exprimer x_{n+1} et y_{n+1} en fonction de x_n et y_n.
3. En déduire que les suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont strictement croissantes.
4. En déduire qu'il existe bien une infinité de couples d'entiers naturels $(x\,;y) \in \mathbb{N}^2$ tels que $x^2 - 2y^2 = 1$.

Exercice 29 ⋆ ⋆ ⋆ [Communiquer]

Rédiger la démonstration de la formule du binôme de Newton en utilisant le symbole Σ dans l'ensemble des calculs.

Histoire – Équations de Pell

Les équations de la forme $x^2 - ny^2 = m$ (où m et n sont des entiers et où les inconnues x et y sont à chercher parmi les entiers) sont appelées « équations de Pell ». Elles ont été étudiées depuis très longtemps par les civilisations arabes et indiennes notamment. Leur nom est associé au mathématicien **John Pell 1611-1685)** qui s'est intéressé aux équations de nombres entiers mais n'a pourtant pas directement travaillé sur cette équation. En France, et guère ailleurs qu'en France, on associe également ces équations au mathématicien **Pierre de Fermat (1601-1665)** en les nommant « équations de Pell-Fermat ».
Pour une résolution complète de ces équations, il a fallu en fait attendre le XIX^{e} siècle. Cela a notamment été rendu possible grâce aux travaux de **Carl Friedrich Gauß (1777-1855)** qui a utilisé les nombres complexes pour résoudre divers problèmes d'arithmétiques.

Exercice 30 ⋆⋆⋆ [Calculer, Raisonner, Communiquer]

En utilisant la méthode de Cardan, résoudre l'équation suivante dans $\mathbb{R}$.

$$12x^3 + 14x^2 - 1 = 0.$$

Histoire – Einstein au baccalauréat

Albert Einstein a résolu cette équation (exercice 30) dans le cadre de l'épreuve du baccalauréat Suisse de 1896.