Lycée Lucie Aubrac - Terminale

Chapitre 1
Nombres complexes
Propriétés algébriques

Table des matières

Introduction

Histoire – Équations du troisième degré

Les nombres complexes ont été introduit au XVI$^{\text{e}}$ siècle pour résoudre des équations de degré trois. Les mathématiciens ayant travaillé sur le sujet sont notamment **Scipione del Ferro** (1465-1526), **Anton Maria del Fiore**, **Girolamo Cardano** (1501-1576), **Niccolò Tartaglia** (1500-1557), **Ludovico Ferrari** (1522-1565) et **Rafael Bombelli** (1526-1573). En particulier, l'idée est apparue d'effectuer un changement de variables afin de se rammener à une équation de degré 2.

Niccolò Tartaglia

Girolamo Cardano

Résolution de $x^3 - 3x^2 - 15x - 18 = 0$ (E)

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$ donc :

$$\begin{aligned} x^3 - 3x^2 - 15x - 18 = 0 &\iff (x-1)^3 - 3x + 1 - 15x - 18 = 0 \\ &\iff (x-1)^3 - 18x - 17 = 0. \end{aligned}$$

On pose $y = x - 1$. L'équation (E) devient :

$$y^3 - 18(y+1) - 17 = 0$$

c'est-à-dire

$$y^3 - 18y - 35 = 0$$

Cardano a eu l'idée de chercher une solution de (E') sous la forme $y = u + v$. Ainsi,

$$\begin{aligned} y \text{ est solution de } (E') &\iff (u+v)^3 - 18(u+v) - 35 = 0 \\ &\iff u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 - 18(u+v) - 35 = 0 \\ &\iff u^3 + v^3 - 35 + (u+v)(3uv - 18) = 0 \\ &\Longleftarrow \begin{cases} u^3 + v^3 - 35 = 0 \\ 3uv - 18 = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} u^3 + v^3 = 35 \\ u^3v^3 = 6^3 = 216 \end{cases} \end{aligned}$$

u^3 et v^3 sont les solutions de l'équation de degré deux :

$$X^2 - 35X + 216 = 0.$$

Les solutions de cette équation sont 8 et 27 donc $u^3 = 8 = 2^3$ et $v^3 = 27 = 3^3$ (ou inversement) et donc $u = 2$ et $v = 3$ conviennent.
Ainsi, $y = u + v = 5$ est solution de (E') donc $x = y + 1 = 6$ est solution de (E).
Sachant que 6 est une solution de (E), on peut factoriser l'équation (E) par $(x - 6)$:
On cherche $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$x^3 - 3x^2 - 15x - 18 = (x - 6)(ax^2 + bx + c).$$

En développant et en identifiant les coefficients, on obtient $a = 1$, $b = 3$ et $c = 3$.
Ainsi, $(E) \iff (x - 6)(x^2 + 3x + 3) = 0$
Le polynôme $x^2 + 3x + 3$ a un discriminant strictement négatif ($\Delta = 3^2 - 4 \times 1 \times 3 = -3$) et n'a donc aucune racine réelle.
Finalement, on en déduit que (E) admet une seule solution réelle, à savoir 6.

Résolution de $x^3 - 15x - 4 = 0$ (F)

On pose $x = u + v$ et on obtient :

$$\begin{aligned}
x \text{ est solution de } (F) &\iff (u+v)^3 - 15(u+v) - 4 = 0 \\
&\iff u^3 + v^3 + 3u^2v + 3uv^2 - 15(u+v) - 4 = 0 \\
&\iff u^3 + v^3 - 4 + (u+v)(3uv - 15) = 0 \\
&\Longleftarrow \begin{cases} u^3 + v^3 - 4 = 0 \\ 3uv - 15 = 0 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} u^3 + v^3 = 4 \\ u^3v^3 = (5)^3 = 125 \end{cases}
\end{aligned}$$

u^3 et v^3 sont donc solutions de $X^2 - 4X + 125 = 0$.
Or, $\Delta = 4^2 - 4 \times 1 \times 125 = -484$ donc l'équation de degré 2 n'a pas de solution.
Pourtant, pour $x = -10$, $x^3 - 15x - 4 < 0$ et pour $x = 10$, $x^3 - 15x - 4 > 0$, c'est donc que l'équation (F) admet au moins une solution réelle.

Les mathématiciens de la Renaissance, en particulier Rafael Bombelli, décident de continuer malgré tout en utilisant la même méthode que précédemment et en s'autorisant à écrire la racine d'un nombre négatif :

$$\begin{aligned}
X^2 - 4X + 125 &= (X-2)^2 - 4 + 125 \\
&= (X-2)^2 + 11^2 \\
&= (X-2)^2 - (11\sqrt{-1})^2 \\
&= (X - 2 - 11\sqrt{-1})(X - 2 + 11\sqrt{-1})
\end{aligned}$$

On a donc $u^3 = 2 + 11\sqrt{-1}$ et $v^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$.
Ainsi,

$$u = \sqrt[3]{2 + 11\sqrt{-1}}$$

Or, par ailleurs :

$$\begin{aligned}(2+\sqrt{-1})^3 &= 2^3+3\times 2^2\times\sqrt{-1}+3\times 2\times(\sqrt{-1})^2+(\sqrt{-1})^3\\ &= 8+12\sqrt{-1}-6-\sqrt{-1}\\ &= 2+11\sqrt{-1}\end{aligned}$$

Ainsi, $2+\sqrt{-1}=\sqrt[3]{2+11\sqrt{-1}}$ et par suite, $u=2+\sqrt{-1}$.
De la même manière, on montre que $v=2-\sqrt{-1}$.

Finalement,

$$x=u+v=\left(2+\sqrt{-1}\right)+\left(2-\sqrt{-1}\right)=4.$$

On vérifie un peu sceptique et on se rend compte que 4 est bien solution de (F) !

Comme 4 est une solution de (F), on peut factoriser par $(x-4)$:

$$(F)\iff(x-4)(x^2+4x+1)=0$$

Comme l'équation $x^2+4x+1=0$ a pour solution $-2+\sqrt{3}$ et $-2-\sqrt{3}$,
l'ensemble des solutions de (F) est :

$$\mathcal{S}=\left\{4\,;-2-\sqrt{3}\,;-2+\sqrt{3}\right\}.$$

1 Définition et propriétés des nombres complexes

1.1 Définition d'un nombre complexe

Définition 1

- Il existe un nombre i tel que $i^2=-1$
- Un **nombre complexe** z est un nombre de la forme $z=a+ib$ avec $a\in\mathbb{R}$ et $b\in\mathbb{R}$.
- L'ensemble des nombres complexes est noté $\mathbb{C}$.

Remarque.
On ne note pas $\sqrt{-1}$ pour éviter les confusions. Sinon, on pourrait être tenté d'écrire par exemple :

$$(\sqrt{-1})^2=\sqrt{(-1)^2}=1.$$

Définition 2

- L'écriture d'un nombre complexe z sous la forme $z=a+ib$ est appelée forme algébrique de z.
- Le nombre réel a est appelé **partie réelle** de z et on note $a=\mathrm{Re}(z)$.
- Le nombre réel b est appelé **partie imaginaire** de z et on note $b=\mathrm{Im}(z)$.

Remarque.

- La partie imaginaire d'un nombre complexe est un réel.
- Il n'y a pas d'ordre dans $\mathbb{C}$. En particulier, un nombre complexe n'est ni positif ni négatif et écrire $2i > 0$ n'a aucun sens.

Exemples.

- $5 + i$ est un nombre complexe avec $a = 5$ et $b = 1$.
- Les nombres réels sont des cas particuliers de nombres complexes (avec $b = 0$).

Définition 3

- Si $z = ib$ avec $b \in \mathbb{R}$, z est appelé un **imaginaire pur**
- L'ensemble des nombres imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$

Histoire – Nombres complexes

La notation i n'a pas été utilisée dès le départ.
En 1777, **Leonhard Euler** décida de l'introduire (i comme imaginaire) et d'écrire $i \times i = -1$ afin d'éviter les ambiguités de la notation $\sqrt{-1}$.
À la fin du XVIII$^{\text{e}}$ siècle, les quantités imaginaires n'étaient pourtant toujours pas réellement acceptées par la communauté mathématique mais seulement tolérées pour leur côté pratique. C'est au XIX$^{\text{e}}$ siècle que des mathématiciens comme **Carl Friedrich Gauß** finissent par leur donner une véritable légitimité. Cela passera entre autres par le fait de représenter géométriquement les nombres complexes dans le plan (voir chapitres suivants). Aussi, Gauss adoptera le terme « nombres complexes » pour rompre avec l'idée qu'il s'agit de quantités qui n'existeraient pas comme le suggère le terme « imaginaire ».

Leonhard Euler

1.2 Nombres complexes et opérations

Définition 4

Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ et $z' = a' + ib' \in \mathbb{C}$ (a, b, a', b' sont des réels).

- $z + z' = (a + a') + i(b + b')$
- $z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$.

Exemple.

Si $z = 1 + i$ et $z' = 2 - 3i$.
$z + z' = (1 + i) + (2 - 3i) = (1 + 2) + i(1 + (-3)) = 3 - 2i$

Proposition 1

Soient $z \in \mathbb{C}$ et $z' \in \mathbb{C}$.

- $z = 0 \iff \text{Re}(z) = 0$ et $\text{Im}(z) = 0$.
- $z = z' \iff \text{Re}(z) = \text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z) = \text{Im}(z')$.

Remarque.
Le deuxième point de la Proposition 1 signifie que la forme algébrique d'un nombre complexe est unique.

Démonstration.

- Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.
  Supposons que $z = 0$.
  On veut montrer qu'alors $a = 0$ et $b = 0$. Supposons par l'absurde que $b \neq 0$.
  Comme $a + ib = 0$, alors $i = -\dfrac{a}{b}$ (car $b \neq 0$).
  Finalement, cela prouve que i est un nombre réel, ce qui est absurde.
  On a donc prouvé que $b = 0$. Par ailleurs, $z = a + ib = a + i \times 0 = a$ donc $a = 0$.
  Réciproquement, si $a = 0$ et $b = 0$, il est immédiat de voir que $z = a + ib = 0$.
- Soit $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ et $z' = a' + ib'$ avec $a', b' \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
z = z' &\iff a + ib = a + ib' \\
&\iff (a - a') + i(b - b') = 0 \\
&\iff \begin{cases} a - a' = 0 \\ b - b' = 0 \end{cases} \text{d'après le point précédent} \\
&\iff \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} \mathrm{Re}(z) = \mathrm{Re}(z') \\ \mathrm{Im}(z) = \mathrm{Im}(z') \end{cases}
\end{aligned}$$

□

Méthode – Déterminer un ensemble de complexes vérifiant une condition

On utilise les propriétés suivantes :
- $z \in i\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0$.
- $z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0$.

Exemple.
Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $z = x^3 + 2 + i(x - 2)$.
Déterminer les valeurs de x pour lesquelles z est un réel. Déterminer z le cas échéant.

Solution :
$z \in \mathbb{R} \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff a - 2 = 0 \iff x = 2$.
Dans ce cas, $z = 2^3 + 2 + i \times (2 - 2) = 10$.

Proposition 2

Soient $z, z', z'' \in \mathbb{C}$.
- $z + z' = z' + z$ **(commutativité de l'addition)**
- $zz' = z'z$ **(commutativité de la multiplication)**
- $(z + z') + z'' = z + (z' + z'')$ **(associativité de l'addition)**
- $(zz')z'' = z(z'z'')$ **(associativité de la multiplication)**
- $z + 0 = z$ **(élément neutre de l'addition)**
- $z \times 1 = z$ **(élément neutre de la multiplication)**
- $z(z' + z'') = zz' + zz''$ **(distributivité)**
- Si $zz' = 0$ alors $z = 0$ ou $z' = 0$ **(règle du produit nul)**

Démonstration.
On écrit $z = a + ib$, $z' = a' + ib'$ et $z'' = a'' + ib''$ avec $a, b, a', b', a'', b'' \in \mathbb{R}$. Les démonstrations découlent de la définition de l'addition et de la multiplication de nombres complexes. On détaille par exemple la démonstration de la règle du produit nul.
Il est clair que si $z = 0$ ou $z' = 0$ alors $zz' = 0$.
Réciproquement, supposons que $zz' = 0$. Cela signifie que $(aa' - bb') + i(ab' + a'b) = 0$.
Par unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe, on en déduit le système d'égalités suivant :

$$\begin{cases} aa' - bb' = 0 \\ ab' + a'b = 0 \end{cases}$$

- Si $a' \neq 0$, on peut également en déduire :

$$\begin{cases} a = \frac{bb'}{a'} \\ \frac{bb'}{a'} \times b' + a'b = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} a = \frac{bb'}{a'} \\ b \times \left(\frac{b'^2}{a'} + a'\right) = 0 \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} a = \frac{bb'}{a'} \\ \frac{b}{a'} \times (b'^2 + a'^2) = 0 \end{cases}$$

  D'après la seconde égalité, on en déduit que $\frac{b}{a'} = 0$ ou $b'^2 + a'^2$.
  La seconde égalité est impossible donc $\frac{b}{a'} = 0$ donc $b = 0$. En utilisant la première égalité, on voit alors que $a = \frac{bb'}{a'} = 0$. Finalement, on a montré que $a = b = 0$ et donc que $z = 0$.
- Si $a' = 0$. On obtient les équations $bb' = 0$ et $ab' = 0$.
  Ainsi, soit $b' = 0$ et donc $z' = 0$. Dans le cas où $b' = 0$, on aura $a = b = 0$ et donc $z = 0$.
  En conclusion, on a montré que, dans tous les cas, $z = 0$ ou $z' = 0$.

$\square$

Exemple.
Si $z = 1 + i$ et $z' = 2 - 3i$.
$z \times z' = (1 + i)(2 - 3i) = 1 \times 2 + 1 \times (-3i) + i \times 2 + i \times (-3i) = 2 - 3i + 2i + 3 = 5 - i$.

2 Conjugué d'un nombre complexe

2.1 Définition et propriétés algébriques

Définition 5

Le conjugué d'un nombre complexe z est le nombre complexe noté $\overline{z}$ et défini par :

$$\overline{z} = \text{Re}(z) - i\,\text{Im}(z).$$

Remarque.
Les nombres complexes conjugués sont utilisés pour résoudre des équations polynomiales (*cf* introduction) ou pour calculer l'inverse d'un nombre complexe.

Exemple.
Si $z = 3 + 5i$ alors $\overline{z} = 3 - 5i$.

Proposition 3

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\overline{\overline{z}} = z$.

Démonstration.
Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).
$\overline{\overline{z}} = \overline{\overline{a+ib}} = \overline{a-ib} = \overline{a-(-ib)} = a + ib = z$. $\square$

Proposition 4

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

1. $z + \overline{z} = 2\mathrm{Re}(z)$
2. $z - \overline{z} = 2i\,\mathrm{Im}(z)$

Démonstration.
Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

1. $z + \overline{z} = (a + ib) + (a - ib) = 2a = 2\mathrm{Re}(z)$.
2. $z - \overline{z} = (a + ib) - (a - ib) = 2ib = \mathrm{Im}(z)$.

$\square$

Proposition 5

Pour tout $z \in \mathbb{C}$,

1. $z \in \mathbb{R} \iff \overline{z} = z$
2. $z \in i\,\mathbb{R} \iff \overline{z} = -z$

Démonstration.
Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

1. $\overline{z} = z \iff \overline{z} - z = 0 \iff 2i\,\mathrm{Im}(z) = 0 \iff \mathrm{Im}(z) = 0 \iff z \in \mathbb{R}$.
2. $\overline{z} = -z \iff \overline{z} + z = 0 \iff 2\,\mathrm{Re}(z) = 0 \iff \mathrm{Re}(z) = 0 \iff z \in i\mathbb{R}$.

$\square$

Proposition 6

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z\overline{z} \in \mathbb{R}$ et :

$$z\overline{z} = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$$

Démonstration.
Soit $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).
Alors $z\overline{z} = (\mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z))(\mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z)) = (\mathrm{Re}(z))^2 + (\mathrm{Im}(z))^2$. En particulier, $z\overline{z} \in \mathbb{R}$. $\square$

Méthode – Résoudre une équation dans $\mathbb{C}$

- Si z ou $\overline{z}$ intervient seul, on résout de la même manière que dans $\mathbb{R}$.
- Si z et $\overline{z}$ interviennent simultanément, on pose $z = a + ib$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$) et on utilise la propriété 1 d'unicité de la forme algébrique d'un nombre complexe.

Exemple.
Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $3\overline{z} + 2i = 5\overline{z}$
2. $4 + i + 2z = i\overline{z}$

Solution :

1. Soit $z \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned} & 2i = 5\overline{z} - 3\overline{z} \\ \iff & 2i = 2\overline{z} \\ \iff & \overline{z} = i \\ \iff & z = -i \end{aligned}$$

2. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned} & 4 + i + 2z = i\overline{z} \\ \iff & 4 + i + 2(a + ib) = i(a - ib) \\ \iff & 4 + i + 2(a + ib) = ia + b \\ \iff & 4 + i + 2(a + ib) - ia - b = 0 \\ \iff & 4 + 2a - b + i(1 + 2b - a) = 0 \\ \iff & \begin{cases} 4 + 2a - b = 0 \\ 1 + 2b - a = 0 \end{cases} \\ \iff & \begin{cases} a = -3 \\ b = -2 \end{cases} \\ \iff & z = -3 - 2i \end{aligned}$$

2.2 Inverse et quotient de nombres complexes

Proposition 7

Pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un unique $z' \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$.
Le nombre z' est appelé l'**inverse** de z et noté $\dfrac{1}{z}$.

Démonstration. Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ (avec $a, b \in \mathbb{R}$).
Dans le cas où $b = 0$, $z \in \mathbb{R}$ et la propriété est évidente. On peut donc supposer que $b \neq 0$.
Analyse : Supposons qu'il existe $z' = c + id \in \mathbb{C}$ tel que $zz' = 1$.
Ainsi, $(a + ib)(c + id) = 1$
Donc $(ac - bd) + i(ad + bc) = 1$

Donc $\begin{cases} ac - bd = 1 \\ ad + bc = 0 \end{cases}$

Donc $\begin{cases} ac - bd = 1 \\ c = -\frac{ad}{b} \quad \text{(car } b \neq 0) \end{cases}$

Donc $\begin{cases} a \times (-\dfrac{ad}{b}) - bd = 1 \\ c = -\frac{ad}{b} \end{cases}$

Donc $\begin{cases} -\frac{d}{b} \times (a^2 + b^2) = 1 \\ c = -\frac{ad}{b} \end{cases}$

Donc $\begin{cases} d = -\frac{b}{a^2+b^2} \quad \text{(car } a^2 + b^2 \neq 0) \\ c = -\frac{ad}{b} \end{cases}$

Donc $\begin{cases} d = -\frac{b}{a^2+b^2} \\ c = \frac{a}{a^2+b^2} \end{cases}$

Ainsi, $z' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{ib}{a^2 + b^2}$.
Cela prouve donc que si z' existe, alors il est unique.

Synthèse : Soit $z = a + ib \in \mathbb{C}^*$ (avec $(a, b \in \mathbb{R})$.
On pose $z' = \dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{ib}{a^2 + b^2}$ (ce qui est possible car $a^2 + b^2 \neq 0$).
On a alors $z \times z' = (a + ib)\left(\dfrac{a}{a^2 + b^2} - \dfrac{ib}{a^2 + b^2}\right) = \ldots = 1$.
Cela prouve donc l'existence de z'. □

Définition 6

Pour tous $z, z' \in \mathbb{C}$, le **quotient** de z par z' est le nombre complexe $z \times \dfrac{1}{z'}$.
On le note $\dfrac{z}{z'}$.

Méthode – Calculer la forme algébrique d'un quotient $\dfrac{z_1}{z_2}$

Multiplier le numérateur et le dénominateur par $\overline{z_2}$.

Exemple.
Calculer la forme algébrique de $z = \dfrac{1 - i}{3 + 4i}$

Solution :
$z = \dfrac{1 - i}{3 + 4i} = \dfrac{(1 - i)(3 - 4i)}{(3 + 4i)(3 - 4i)} = \dfrac{3 - 4i - 3i - 4}{3^2 + 4^2} = \dfrac{-1 - 7i}{25} = -\dfrac{1}{25} - \dfrac{7}{25}i$

2.3 Conjugué et opérations

Proposition 8

Pour tous $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

1. $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$
2. $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \times \overline{z_2}$
3. Si $z_1 \neq 0$, alors $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{1}{\overline{z_1}}$
4. Si $z_2 \neq 0$ alors $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = \frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$
5. $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$

Démonstration.

1. Soit $z_1 = a_1 + ib_1$ et $z_2 = a_2 + ib_2$. Il suffit alors d'écrire les deux termes de l'égalité en fonction de a_1, a_2, b_1 et b_2 afin de vérifier l'égalité annoncée.
2. idem
3. Soit $z_1 \in \mathbb{C}^*$. Par définition de l'inverse de z_1, $z_1 \times \frac{1}{z_1} = 1$.

   Ainsi, $\overline{z_1 \times \frac{1}{z_1}} = \overline{1} = 1$.

   Or, $\overline{z_1 \times \frac{1}{z_1}} = \overline{z_1} \times \overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)}$ d'après le point 2.

   On en déduit que $\overline{z_1} \times \overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = 1$.

   Par définition de l'inverse de $\overline{z_1}$, on en déduit que $\overline{\left(\frac{1}{z_1}\right)} = \frac{1}{\overline{z_1}}$.
4. Cela résulte immédiatement des points 2 et 3, en écrivant que $\frac{z_1}{z_2} = z_1 \times \frac{1}{z_2}$.
5. On montre par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « $\overline{(z^n)} = (\overline{z})^n$ » est vraie pour $n \in \mathbb{N}^*$.
   Initialisation : Pour $n = 1$, l'égalité est évidente : $\overline{z} = \overline{z}$.
   Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.
   Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
   $\overline{(z^{n+1})} = \overline{(z^n \times z)} = \overline{(z^n)} \times \overline{z}$ (d'après le point 2)
   $= (\overline{z})^n \times \overline{z}$ (d'après $\mathcal{P}(n)$)
   $= (\overline{z})^{n+1}$.
   Ainsi, on a prouvé que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

□

3 Binôme de Newton

3.1 Coefficients binomiaux

Définition 7

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **factorielle** de n le nombre :

$$n! = n \times (n-1) \times \ldots \times 2 \times 1.$$

Définition 8

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Soit A un ensemble à n éléments.
Le **coefficient binomial** « k parmi n », noté $\binom{n}{k}$, est le nombre de sous-ensemble de A ayant k éléments.

Exemples.
$\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{0} = 1$.

Proposition 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Remarque.
La Proposition 9 permet de calculer directement un coefficient binomial. Les calculs de factorielles sont toutefois fastidieux et l'intérêt de cette formule est donc surtout théorique.

Démonstration.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$.
Pour choisir une liste de k éléments parmi un ensemble de n éléments, on commence par choisir un premier élément. Il y a n possibilités. Ensuite, on choisit un second élément. Il y a $n-1$ possibilités. On choisit comme cela chaque élément jusqu'au k^{e} élément pour lequel il y a $n-k+1$ possibilités.
Au total, il y a donc $n \times (n-1) \times \ldots \times (n-k+1) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ possibilités.
On a ici choisi une liste de k éléments parmi n éléments pour laquelle l'ordre du choix importe. En revanche, dans un ensemble, l'ordre des éléments n'importe pas. Le nombre de possibilités que nous avons déterminé compte donc plusieurs fois le même ensemble. Or, pour ordonner k éléments donnés, il y a $k \times (k-1) \times \ldots \times 2 \times 1 = k!$ possibilités. Il faut donc diviser le nombre de possibilités trouvé par $k!$.
Ainsi, on obtient : $\binom{n}{k} = \dfrac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$. □

Exemples.
$\binom{7}{2} = \dfrac{7!}{2! \times (7-2)!} = \dfrac{7!}{2! \times 5!} = \dfrac{7 \times 6}{2} = 21.$

Proposition 10 – Relation de Pascal

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $0 \leqslant k \leqslant n$:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}.$$

Remarque.
La relation de Pascal (Proposition 10) est une relation de récurrence. Elle nécessite de calculer tous les coefficients binomiaux précédents mais permet d'éviter le calcul des factorielles.

Démonstration.
Soit A un ensemble à $n+1$ éléments. On considère un élément fixé que l'on note x_1.
Il y a $\binom{n+1}{k+1}$ sous-ensembles de A ayant $k+1$ éléments.
On va calculer ce nombre de sous-ensembles d'une autre façon afin d'établir la formule annoncée.
Pour choisir un sous ensemble de A ayant $k+1$ éléments, on peut commencer par choisir si x_1 appartient à ce sous ensemble.
Si x_1 appartient au sous-ensemble, il reste alors à choisir k éléments parmi les n restants. Il y a $\binom{n}{k}$ possibilités.
Si x_1 n'appartient pas au sous-ensemble, il reste à choisir $k+1$ éléments parmi les n restants. Il y a $\binom{n}{k+1}$ possibilités.
Au total, le nombre de sous-ensembles possibles est $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$, d'où le résultat. □

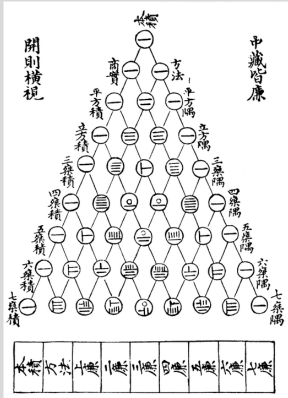
Remarque.
La relation de Pascal permet de construire le tableau suivant appelé **triangle de Pascal**. Chaque coefficient s'obtient en ajoutant le coefficient au dessus de lui et celui à gauche de ce dernier.

n \ k	0	1	2	3	4	5	...
0	1						
1	1	1					
2	1	2	1				
3	1	3	3	1			
4	1	4	6	4	1		
5	1	5	10	10	5	1	
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

D'après le tableau, on sait par exemple que $\binom{4}{2} = 6$.

Histoire – Coefficients binomiaux

On désigne généralement par « triangle de Pascal » le tableau décrit ci-dessus. Ce triangle était en réalité déjà connu en Orient et au Moyen-Orient plusieurs siècles avant la publication de Blaise Pascal. Il était connu des mathématiciens persans au Xe siècle mais aussi en Chine à partir du XIII e siècle. Plus tard, au XVIIe siècle, l'apport de **Blaise Pascal** (1623-1662) sera de proposer une démonstration rigoureuse de la relation qui portera son nom. Pour la démontrer, il met en place une version aboutie du raisonnement par récurrence.



Triangle arithmétique (Chine, XIIIe - XIVe siècles)

3.2 Formule du binôme de Newton

Proposition 11 – Binôme de Newton

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, pour tous $a, b \in \mathbb{C}$:

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration.

On montre par récurrence que la propriété $\mathcal{P}(n)$: « Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$, $(a+b)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ » est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$(a+b)^1 = a + b$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} a^k b^{n-k} = \binom{1}{0} a^0 b^1 + \binom{1}{1} a^1 b^0 = a + b$.

Ainsi, $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$.

Montrons qu'alors $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie, c'est-à-dire que $(a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$.

Autrement dit, on souhaite montrer que le coefficient devant $a^k b^{n+1-k}$ dans le développement de $(a+b)^{n+1}$ est $\binom{n+1}{k}$.

En fait : $(a+b)^{n+1} = (a+b) \times (a+b)^n = a(a+b)^n + b(a+b)^n$

$= a\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right) + b\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}\right)$

$= a\left(b^n + \ldots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \ldots a^n\right) + b\left(b^n + \ldots + \binom{n}{k} a^k b^{n-k} + \ldots a^n\right)$

$$= \left(ab^n + \ldots + \binom{n}{k}a^{k+1}b^{n-k} + \ldots a^{n+1}\right) + \left(b^{n+1} + \ldots + \binom{n}{k}a^k b^{n+1-k} + \ldots ba^n\right)$$

Ainsi, dans la deuxième parenthèse, le coefficient devant $a^k b^{n+1-k}$ est $\binom{n}{k}$.
De plus, dans la première parenthèse, le coefficient devant $a^k b^{n+1-k}$ est $\binom{n}{k-1}$.
Au total, cela signifie que le coefficient devant $a^k b^{n+1-k}$ est :

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$$

D'après la relation de Pascal (Proposition 10), ce coefficient est en fait égal à $\binom{n+1}{k}$.

Finalement, cela signifie que $(a+b)^{n+1} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}$ et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. □

Exemples.

1. Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$:

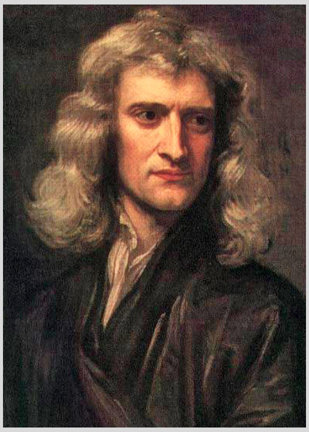
$$\begin{aligned}(a+b)^5 &= \binom{5}{0}a^0b^5 + \binom{5}{1}a^1b^4 + \binom{5}{2}a^2b^3 + \binom{5}{3}a^3b^2 + \binom{5}{4}a^4b^1 + \binom{5}{5}a^5b^0 \\ &= b^5 + 5ab^4 + 10a^2b^3 + 10a^3b^2 + 5a^4b + a^5\end{aligned}$$

2. Pour tous $a, b \in \mathbb{C}$:

$$\begin{aligned}(a-b)^3 &= (a+(-b))^3 \\ &= \binom{3}{0}a^0(-b)^3 + \binom{3}{1}a^1(-b)^2 + \binom{3}{2}a^2(-b)^1 + \binom{3}{3}a^3(-b)^0 \\ &= -b^3 + 3ab^2 - 3a^2b + a^3\end{aligned}$$

Histoire – Binôme de Newton

La formule du « binôme de Newton » était en réalité connue bien avant Newton. Dès le Xᵉ siècle, elle est utilisée par des mathématiciens indiens (**Halayudha**), arabes et perses (**Al-Karaji**) et au XIIIᵉ siècle, le mathématicien chinois **Yang Hui** la démontra indépendamment. En 1665, l'apport d'**Isaac Newton** (1642-1727) a en fait été de la généraliser à des exposants non entiers.



Isaac Newton

Blaise Pascal

QCM d'entrainement

Savoir-faire du chapitre

- Effectuer des calculs avec les nombres complexes
- Résoudre une équation faisant intervenir z ou $\overline{z}$.
- Utiliser la formule du binôme de Newton et les coefficients binomiaux.
- Utiliser la méthode d'analyse-synthèse pour démontrer un résultat.