

Travail encadré de recherche
Autour de la Grassmannienne...

Yannick Vincent
encadré par Serge Parmentier

Semestre 2 : 2011/2012

Remerciements

Serge Parmentier,

Je tiens à vous remercier pour tout le temps et l'énergie dépensés qui m'ont permis de faire ce TER et tout particulièrement pour la liberté que vous m'avez accordé durant le semestre en étant toujours très arrangeant. Je voudrais également vous remercier pour le sujet qui m'a intéressé de plus en plus, au fur et à mesure que je me plongeais dedans. Me dire qu'il m'a permis de reprendre goût aux mathématiques n'est pas rien. Vivement le cours de l'année prochaine en Géométrie différentielle !

Je souhaite remercier également Lorenzo Brandolese ainsi que Kenji Hioara qui m'ont proposé des sujets au début de semestre. Notamment, je remercie L. Brandolese pour les entretiens que nous avons eu : car nous avons déjà commencé à travailler sur les EDP et les espaces de Sobolev !

Je souhaite remercier l'ensemble des profs de Lyon 1 que j'ai eu cette année et qui pour la plupart m'ont permis d'apprendre plein de choses. Je dois avouer que le cours d'analyse de Francis Clarke m'a passionné.

Je remercie d'ores et déjà Sebastien Gauthier qui a accepté d'encadrer mon mémoire de M2 en histoire des mathématiques. Cela a contribué également à me remotiver pour travailler cette fin d'année.

Je souhaite également remercier Caro, Felix, et les 2 Max avec qui il était agréable d'étudier pendant un an.

Introduction

Nous nous proposons comme il est indiqué dans le titre de ce TER d'étudier le comportement de la Grassmannienne d'un espace vectoriel, c'est à dire l'ensemble des sous-espaces de dimension donnée.

Pour cela, nous commencerons par une première partie de combinatoire algébrique. L'objectif sera d'utiliser des résultats classiques de la théorie des groupes et de la théorie des actions de groupes pour calculer notamment, le cardinal de la Grassmannienne lorsqu'elle est définie sur un corps fini. Ensuite, nous regarderons quelques résultats de géométrie projective. L'espace projectif étant l'ensemble des droites de notre espace vectoriel, cela nous permettra d'approcher ce cas particulier de la Grassmannienne à l'aide de la géométrie différentielle. L'avantage de ce cas particulier, sera comme tout cas particulier, de pouvoir se représenter avec des dessins, de faire les calculs concrètement. Par exemple, on définira à cette occasion les changements de cartes, le birapport... permettant de comprendre un peu mieux cet ensemble. Encore un petit effort sera nécessaire afin de pouvoir aborder la Grassmannienne. En effet, nous introduirons dans la troisième partie la notion d'algèbre tensorielle et celle d'algèbre extérieure.

Nous pourrons alors la Grassmannienne. Tout d'abord la voir comme étant un sous-ensemble d'un certain espace projectif. Autrement dit, l'étude des sous-espaces vectoriels de dimension donnée se « ramènera » à l'étude des droites. Un peu de travail nous permettra de caractériser ce sous-ensemble comme étant un lieu d'annulation des relations de Plücker : le fameux ! Nous finirons avec une cinquième partie sur la Grassmannienne Lagrangienne qui apparaît naturellement lors de l'étude des formes symplectiques sur notre espace vectoriel initial. Les arguments mis en places tout au long des quatre premières parties seront réinvestis. Ils permettront par exemple de calculer son cardinal dans le cadre d'un espace vectoriel défini sur un corps fini. Ces deux dernières parties ont pris le mémoire [1] Grassmann Varieties de Ratnadh Kolhatkar comme base pour la rédaction, lui même inspiré de [7] Algebraic Geometry de Hassett.

Il s'agit donc d'un sujet traitant de plusieurs domaines des mathématiques. En effet, nous aurons besoin de notions d'algèbres multilinéaires et de géométrie algébrique ou encore de quelques concepts de géométrie différentielle.

Commençons, sans plus attendre!!!

Table des matières

Remerciements	i
Introduction	ii
1 Combinatoire algébrique	1
1.1 Cardinaux et actions de groupes	1
1.2 Isomorphismes particuliers	3
2 Géométrie projective	6
2.1 Introduction et définition de l'espace projectif	6
2.1.1 Complétion projective d'un espace affine	8
2.2 Homographies	9
2.2.1 Coordonnées homogènes et repères projectifs	10
2.2.2 Homographies de la droite	11
2.3 Birapport	11
2.3.1 Introduction du birapport	12
2.3.2 Propriétés et calcul du birapport	13
2.4 Notions de bases sur les variétés	14
2.4.1 Cartes et Atlas	14
2.4.2 Application à l'espace projectif	15
3 Algèbre multilinéaire	18
3.1 Produit tensoriel	18
3.1.1 Introduction du produit tensoriel de deux espaces vectoriels	18
3.1.2 Propriétés du produit tensoriel	20
3.1.3 Produit tensoriel d'applications linéaires	21
3.1.4 Algèbre tensorielle	21
3.2 Algèbre symétrique	22
3.3 Algèbre Extérieure	22
4 Etude de la Grassmannienne	26
4.1 Application et coordonnées de Plücker	26
4.2 La Grassmannienne : une variété algébrique...	28
4.2.1 Grassmannienne et vecteurs décomposables	28
4.2.2 La Grassmannienne vue comme une variété	30

4.3	Relations de Plücker	30
4.3.1	Quelques lemmes d'algèbres multilinéaires	30
4.3.2	Relations de Plücker et exemple	33
4.4	Recouvrement affine de la Grassmannienne	36
5	La Grassmannienne Lagrangienne	39
5.1	Introduction et définition de la Grassmannienne Lagrangienne	39
5.1.1	Autour des formes symplectiques	39
5.1.2	La Grassmannienne Lagrangienne !	41
5.2	La Grassmannienne Lagrangienne : une autre variété algébrique...	43
5.3	Dénombrement de $L_{n,2n}(\mathbb{F}_q)$	44
5.3.1	Action sur la Grassmannienne Lagrangienne	45
5.3.2	Petit exercice classique de dénombrement	46

Chapitre 1

Combinatoire algébrique

1

1.1 Cardinaux et actions de groupes

Definition / Notation 1

On note \mathbb{F}_q le corps fini à q éléments.

Pour tout corps \mathbb{K} , on désigne par $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ l'espace projectif qui est l'ensemble des droites de \mathbb{K}^n . On désigne également par $PGL_n(\mathbb{K})$ le quotient de $GL_n(\mathbb{K})$ par son centre. Il est appelé le groupe projectif

On définit le groupe spécial linéaire $SL_n(\mathbb{K}) = \{f \in GL_n, \det(f) = 1\}$

On définit la Grassmannienne $Gr_{m,n}(\mathbb{K}) = \{V \subset (\mathbb{K}^n), \dim(V) = m\}$

On définit enfin la variété de drapeau $\mathcal{F}_n = \{(F_0, \dots, F_1), \dim(F_i) = i, \{0\} = F_0 \subset \dots \subset F_n = \mathbb{K}^n\}$

Nous étudierons plus en détail la notion d'espace projectif, de repère projectif... dans la deuxième section.

Proposition 1 : Caractérisation du centre

Pour tout corps \mathbb{K} , On a

$$\{g \in GL_n(\mathbb{K}) / \forall f \in GL_n(\mathbb{K}), gf = fg\} \simeq \mathbb{K}^*$$

$$\text{donc } PGL_n(\mathbb{K}) \simeq GL_n(\mathbb{K}) / \mathbb{K}^*$$

Démonstration. ² L'idée est de montrer que chaque droite est fixée par un élément du centre. Pour une droite D fixée, il suffit de prendre un vecteur directeur de la droite puis considérer $\tau \in GL_n$ tel que $\tau(D) = D$. En considérant l'image de la droite D par $\tau = u\tau u^{-1}$, on voit que $u(D) = D$. \square

1. Ce premier chapitre est fortement inspiré de [8]

2. Une preuve un peu plus détaillée est disponible sur le cours d'algèbre de Perrin [2]

Proposition 2 : Dénombrement

- a) $|\mathbb{F}_q^n| = q^n$ et $|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)| = 1 + \dots + q^n$
- b) $|GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1) \dots (q^n - q^{n-1}) = q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{j=1}^n (q^j - 1)$
- c) $|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^n - 1) \dots (q^2 - 1)$
- d) $|SL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n-1)}{2}} (q^n - 1) \dots (q^2 - 1)$
- e) $|Gr_{m,n}(\mathbb{F}_q)| = \frac{(q^n - 1) \dots (q^{n-m+1} - 1)}{(q^m - 1) \dots (q - 1)}$
- f) $|\mathcal{F}_n(\mathbb{F}_q)| = \prod_{k=1}^{n-1} (1 + \dots + q^k)$

Démonstration. a) On fait agir \mathbb{K}^* sur $\mathbb{K}^{n+1} - \{0\}$ par homothétie, c'est à dire $(\lambda, v) \mapsto \lambda.v$

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, on voit que $|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)|$ est le nombre d'orbites et que chaque orbite est isomorphe à \mathbb{F}_q^* car l'action est libre ($Stab(v) = \{1\}$).

Comme $\mathbb{F}_q^{n+1} - \{0\}$ est une réunion disjointe d'orbites, on voit que $|\mathbb{F}_q^{n+1} - \{0\}| = |\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)| \times |\mathbb{F}_q^*|$

Ainsi, $|\mathbb{P}^n(\mathbb{F}_q)| = \frac{q^{n+1}-1}{q-1} = 1 + q + \dots + q^n$

b) Une méthode pour démontrer ce résultat consiste à compter le nombre de bases de \mathbb{F}_q^n

En effet, en notant \mathcal{B}_0 une base quelconque de \mathbb{K}^n , on a la bijection :

$$GL_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{B} = \{ \text{bases de } \mathbb{K}^n \}$$

$$g \mapsto g\mathcal{B}_0$$

Ceci est bien une bijection car l'action de GL_n sur les bases est simplement transitive.

Pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$, une base étant une partie libre à n éléments, son premier vecteur est non nul : il y en a donc $q^n - 1$. Le second vecteur doit être non colinéaire au premier, il y en a $q^n - q$. On continue jusqu'au n -ième vecteur, non colinéaire aux $n - 1$ premiers et donc au choix parmi $q^n - q^{n-1}$ vecteurs.

On obtient $|\mathbb{B}| = |GL_n(\mathbb{F}_q)| = (q^n - 1)(q^n - q) \dots (q^n - q^{n-1})$

Remarque : une autre méthode consiste à faire agir $GL_n(\mathbb{K})$ sur $\mathbb{K} - \{0\}$. On obtient ainsi une action transitive, et on peut montrer en outre que pour tout $v \in \mathbb{K}^n - \{0\}$, $Stab(v) \simeq GL_{n-1}(\mathbb{K}) \times \mathbb{K}^{n-1}$ d'où l'on tire la formule.

c) D'après la proposition 1, on a $|PGL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathbb{F}_q^*|}$

d) Le déterminant nous donne une suite exacte $1 \rightarrow SL_n \hookrightarrow GL_n \rightarrow \mathbb{K}^* \rightarrow 1$.

On a donc $Im(\det) = \mathbb{K}^* \simeq GL_n(\mathbb{K}) / \ker(\det) = GL_n(\mathbb{K}) / SL_n(\mathbb{K})$ et pour $\mathbb{K} = \mathbb{F}_q$:

$$|SL_n(\mathbb{F}_q)| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|\mathbb{F}_q^*|}$$

e) En utilisant le théorème de la base incomplète, on montre facilement que GL_n agit transitivement sur la Grassmannienne $Gr_{m,n}$.

Soit $F \in Gr_{m,n}$

On considère une base (e_1, \dots, e_m) de F que l'on complète en une base (e_1, \dots, e_n) de \mathbb{K}^n .

Dans cette base, un élément g du stabilisateur de F est de la forme $\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}$

Or, $g \in GL_n$ donc $g(F)$ est de dimension m et ainsi $A \in GL_m$. De plus, en utilisant un calcul de déterminant par bloc, on montre que $\det(D) \neq 0$ et donc $D \in GL_{n-m}$.

D'où $\text{Stab}(F) = \begin{pmatrix} GL_m(\mathbb{K}) & M_{m,n-m}(\mathbb{K}) \\ 0 & GL_{n-m}(\mathbb{K}) \end{pmatrix}$

On a donc $|\text{Stab}(F)| = |GL_m(\mathbb{F}_q)| \times |GL_{n-m}(\mathbb{F}_q)| \times |M_{m,n-m}(\mathbb{F}_q)|$

et comme l'action est transitive, $|Gr_{m,n}| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{|GL_m(\mathbb{F}_q)| \times |GL_{n-m}(\mathbb{F}_q)| \times |M_{m,n-m}(\mathbb{F}_q)|}$.

En explicitant chacun des cardinaux puis en simplifiant, on obtient la formule souhaitée.

f) Par le théorème de la base incomplète, $GL_n(\mathbb{K})$ agit transitivement sur les variétés de drapeaux, $\mathcal{F}_n(\mathbb{K})$. On considère les sous espaces $F_i = \langle e_1, \dots, e_i \rangle$ où (e_1, \dots, e_n) est la base canonique de \mathbb{K}^n

Alors $\text{Stab}(F_0, \dots, F_n) \simeq (\mathbb{K}^*)^n \times \mathbb{K}^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

En effet, le stabilisateur est le groupe des matrices triangulaires supérieures d'éléments diagonaux dans \mathbb{K}^* .

On considère alors l'application $\Phi : \text{Stab}(F_0, \dots, F_n) \rightarrow (\mathbb{K}^*)^n$

.

$$f \mapsto \text{diag}(f)$$

où $\text{diag}(f)$ est la matrice composée des éléments diagonaux de f . On a alors une section toute trouvée (qui est évidemment un morphisme) : $f \in (\mathbb{K}^*)^n \mapsto f \in \text{Stab}(F_0, \dots, F_n)$.

On voit également que $\ker(\Phi) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & * & * & \dots \\ 0 & 1 & * & \dots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}, * \in \mathbb{K} \right\} \simeq \mathbb{K}^{\frac{n(n-1)}{2}}$ ce qui prouve

le produit semi-direct annoncé.

On a ainsi montré que $|\text{Stab}(F_0, \dots, F_n)| = |(\mathbb{F}_q^*)^n| \times |\mathbb{F}_q^{\frac{n(n-1)}{2}}| = (q-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}$

Comme l'action est transitive, on en déduit le cardinal des variétés de drapeaux :

$$|\mathcal{F}_n| = \frac{|GL_n(\mathbb{F}_q)|}{(q-1)^n q^{\frac{n(n-1)}{2}}} \quad \square$$

1.2 Isomorphismes particuliers

Considérons un groupe G agissant sur un ensemble X de cardinal n et le morphisme associé à l'action : $\Phi : g \in G \mapsto \Phi_g : X \rightarrow X \in \mathfrak{S}_X = \mathfrak{S}_n$
donc $G/\ker(\Phi)$ est inclus dans le :

$$G/\ker(\Phi) \simeq \text{Im}(\Phi) \subset \mathfrak{S}_n$$

Par ailleurs, l'action de $GL_n(\mathbb{K})$ sur les droites projectives $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})$ a pour noyau $\ker(\Phi) = \mathbb{K}^*$. En effet, un endomorphisme qui stabilise toutes les droites est nécessairement une homothétie.

En particulier, $PGL_n(\mathbb{K}) = GL_n(\mathbb{K})/\mathbb{K}^* \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K})}$

Ce résultat nous montre qu'une transformation projective est en réalité une permutation

de droites. De plus, le PGL_n s'identifie avec un sous groupe du groupe symétrique. Un calcul de cardinal va nous permettre de connaître ce sous-groupe dans certains cas particuliers. Avant de démontrer une série d'isomorphismes particuliers, nous allons établir deux lemmes.

lemme 1

³ Pour $n \neq 4$, les sous-groupes distingués du \mathfrak{S}_n sont $\{Id\}$, \mathcal{A}_n et \mathfrak{S}_n

Démonstration. Ces trois groupes sont distingués. Montrons également la réciproque :
 - Pour $n=2$, il est clair que tous les sous-groupes sont distingués dans \mathfrak{S}_2 et ce sont les groupes énumérés dans le lemme.

- Pour $n \geq 5$ ou $n=3$, soit H un sous-groupe distingué. On sait que \mathcal{A}_n est simple. Ainsi, $H \cap \mathcal{A}_n$ est un sous groupe distingué dans \mathcal{A}_n . On a donc $H \cap \mathcal{A}_n = \{Id\}$ ou \mathcal{A}_n . Dans le premier cas, on considère la signature restreinte à $H : ker(\epsilon|_H) = H \cap \mathcal{A}_n = \{Id\}$ donc $\epsilon|_H$ est injective et $|H| \leq 2$. Si $H = \{Id, t\}$ où t est une transposition, la distinction de H implique que $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \sigma t = t\sigma$. Or, le centre $Z(\mathfrak{S}_n) = \{Id\}$ ce qui est contradictoire. Dans le deuxième cas, $\mathcal{A}_n \subset H$ donc H est d'indice 1 ou 2 dans \mathfrak{S}_n c'est-à-dire $H = \mathfrak{S}_n$ ou $H = \mathcal{A}_n$.

□

lemme 2

Tout sous groupe d'indice n de \mathfrak{S}_n est isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1}

Démonstration. - Pour $n=2$, il n'y a rien à démontrer

- Pour $n=3$, un sous groupe de \mathfrak{S}_3 d'indice 3 est d'ordre 2 donc isomorphe à $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$
 - Pour $n=4$, un sous groupe de \mathfrak{S}_4 d'indice 4 est d'ordre 6. Un tel groupe est isomorphe soit à $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, soit à un unique produit semi direct non trivial $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$. Aucun élément de \mathfrak{S}_4 n'est d'ordre 6, ce qui exclut la première possibilité. Le groupe \mathfrak{S}_3 qui est de cardinal 6 mais n'est pas abélien est lui aussi isomorphe au produit semi-direct $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$.

- Pour $n \geq 5$, soit H un sous-groupe de \mathfrak{S}_n d'indice n .

Remarque : \mathfrak{S}_n agit canoniquement sur $X = \{1, \dots, n\}$. Il est facile de voir que le stabilisateur de $x \in X$ est isomorphe à \mathfrak{S}_{n-1} . La preuve qui suit consiste à se ramener à ce résultat.

On considère l'action de \mathfrak{S}_n par multiplication à gauche sur \mathfrak{S}_n/H .

On a donc le morphisme $\Phi : \sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto \{gH \mapsto \sigma gH\} \in \mathfrak{S}(\mathfrak{S}_n/H) \simeq \mathfrak{S}_n$.

De plus, $ker(\Phi) = \bigcap_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} Stab(\sigma) = \bigcap_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sigma H \sigma^{-1}$.

En particulier, $ker(\Phi) \subset H$ et est distingué donc d'après le lemme 1, $ker(\Phi) = \{Id\}$

Ainsi, Φ est injective puis par égalité des cardinaux, on voit que Φ est un isomorphisme.

3. Les idées de démonstration des deux lemmes qui suivent sont tirées de l'ouvrage [3] (pages 269-270)

De plus, l'image $\Phi(H) = \{\sigma/\sigma H = H\}$ car $\sigma \in H \iff \sigma H = H$

On a donc prouvé que $\Phi(H)$ est le stabilisateur de H pour l'action de \mathfrak{S}_n sur \mathfrak{S}_n/H , ce qui conclut la preuve d'après la remarque en prenant $X = \mathfrak{S}_n/H$ et $x=H$. \square

Nous pouvons maintenant, grâce à des calculs de cardinaux, démontrer une série d'isomorphismes particuliers :

Proposition 3 : Isomorphismes particuliers

a) $GL_2(\mathbb{F}_2) \simeq SL_2(\mathbb{F}_2) \simeq PSL_2(\mathbb{F}_2) \simeq PGL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$

b) $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{A}_4 \subset PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$

c) $PGL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathcal{A}_5$

d) $PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathcal{A}_5 \subset PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$

Démonstration. a) Comme $\mathbb{F}_2^* = \{1\}$, on voit que $PGL_2(\mathbb{F}_2) = GL_2(\mathbb{F}_2)/\mathbb{F}_2^* = GL_2(\mathbb{F}_2)$. On a de même $PSL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2)$.

De plus, toute matrice de $GL_2(\mathbb{F}_2)$ est de déterminant 1 donc $GL_2(\mathbb{F}_2) = SL_2(\mathbb{F}_2)$. Aussi, on sait que $PGL_2(\mathbb{F}_2) \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_2)} = \mathfrak{S}_3$ et que $|PGL_2(\mathbb{F}_2)| = \frac{(2^2-1)(2^2-2)}{2-1} = 6 = |\mathfrak{S}_3|$ d'où l'isomorphisme : $PGL_2(\mathbb{F}_2) \simeq \mathfrak{S}_3$

b) $GL_2(\mathbb{F}_3)$ agit sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)$ qui est de cardinal 4, ce qui nous donne l'inclusion : $PGL_2(\mathbb{F}_3) \subset \mathfrak{S}_{\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_3)} = \mathfrak{S}_4$

De plus, $|PGL_2(\mathbb{F}_3)| = \frac{(3^2-1)(3^2-3)}{3-1} = 24 = |\mathfrak{S}_4|$ d'où $PGL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathfrak{S}_4$.

Par ailleurs, $|SL_2(\mathbb{F}_3)| = |PGL_2(\mathbb{F}_3)|$, et il y a deux homothéties dans $SL_2(\mathbb{F}_3)$ qui sont Id et 2Id car $1^2 = 2^2 = 1$ dans \mathbb{F}_3 . Ainsi, $|PSL_2(\mathbb{F}_3)| = |PGL_2(\mathbb{F}_3)|/2$. Or, le seul sous groupe d'indice 2 dans \mathfrak{S}_4 est \mathcal{A}_4 ; d'où l'isomorphisme $PSL_2(\mathbb{F}_3) \simeq \mathcal{A}_4$.

c) Les arguments sont similaires à ceux de la preuve précédente.

L'action de $GL_2(\mathbb{F}_4)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_4)$ nous donne l'inclusion $PGL_2(\mathbb{F}_4) \subset \mathfrak{S}_5$

De plus, $|PGL_2(\mathbb{F}_4)|=60$ donc $PGL_2(\mathbb{F}_4) \simeq \mathcal{A}_5$ car c'est le seul sous-groupe d'indice 2 de \mathfrak{S}_5 . Pour finir, il suffit de remarquer qu'il n'y a qu'une seule homothétie de déterminant 1, c'est l'identité. En effet l'équation $x^2 = 1$ n'admet qu'une seule solution dans \mathbb{F}_4 . On a donc $SL_2(\mathbb{F}_4) = PSL_2(\mathbb{F}_4)$ et d'après la proposition 2, $|PSL_2(\mathbb{F}_4)| = |PGL_2(\mathbb{F}_4)|$. Comme on a évidemment l'inclusion $PSL_2 \subset PGL_2$, on récupère l'égalité souhaitée.

d) Comme précédemment, l'action de $GL_2(\mathbb{F}_5)$ sur $\mathbb{P}^1(\mathbb{F}_5)$ nous donne l'inclusion $PGL_2(\mathbb{F}_5) \subset \mathfrak{S}_6$ et $PGL_2(\mathbb{F}_5) = 120$ d'après la proposition 2.

Ainsi, $PGL_2(\mathbb{F}_5)$ est isomorphe à un sous groupe d'indice 6 dans \mathfrak{S}_6 .

En utilisant le lemme 2, on en déduit que $PGL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathfrak{S}_5$ et l'on finit la démonstration en remarquant comme dans le c) que $PSL_2(\mathbb{F}_5) \simeq \mathcal{A}_5$ \square

Chapitre 2

Géométrie projective

¹ Nous essayerons de présenter les notions classiques de géométrie projective comme le birapport. Le but est en fait d'aborder l'espace projectif comme un cas particulier de la Grassmannienne. Cependant, nous ne présenterons pas la dualité projective qui permet de démontrer de nombreux théorèmes étant donné que cette notion ne nous sera pas utile par la suite. Nous terminerons par la présentation de quelques éléments de géométrie différentielle utiles à l'étude de l'espace projectif comme la notion d'atlas par exemple.

2.1 Introduction et définition de l'espace projectif

Définition 2 : espace projectif et topologie

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur un corps \mathbb{K} . Nous avons déjà défini l'espace projectif $\mathbb{P}(V)$ comme étant l'ensemble des droites de V . On peut le voir également comme l'ensemble des orbites de l'action par multiplication :

$$\mathbb{K}^* \times (V - \{0\}) \longrightarrow (V - \{0\})$$

On définit la dimension de l'espace projectif : $\dim(\mathbb{P}(V)) = \dim(V) - 1$.

On définit également la topologie minimale sur $\mathbb{P}(V)$ telle que l'application suivante soit continue :

$$\rho : V - \{0\} \longrightarrow \mathbb{P}(V)$$

Proposition 4 : Compacité et connexité

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , l'espace projectif $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{K}) = \mathbb{P}(V)$ est un espace topologique connexe et compact.

Démonstration. On note $\mathbb{S}(V)$ la sphère unité de V . On voit alors que $\mathbb{P}(V) = \rho(\mathbb{S}(V))$. On voit alors que $\mathbb{S}(V)$ est un connexe et un compact (d'après le théorème de Riesz car V est de dimension finie).

De plus, $\mathbb{P}(V)$ est un espace topologique séparé.

1. nous utiliserons les ouvrages [4] et [5] pour cette partie

En effet, soient D_1 et $D_2 \in \mathbb{P}(V)$, avec $D_1 \neq D_2$. Montrons que l'on peut "séparer" ces deux droites. En effet, il existe v_1 et $v_2 \in \mathbb{S}(V)$ tels que $D_i = \rho(v_i)$. Soit $\epsilon = \min\{\|v_1 - v_2\|, \|v_1 + v_2\|\}$. On définit l'ensemble $E = \{v \in V / \|v - v_1\| < \frac{\epsilon}{2}\}$. On peut alors considérer l'ouvert $\Omega = \rho(E)$ et on voit que $D_1 \in \Omega$ mais $D_2 \notin \Omega$.

Ainsi, $\mathbb{P}(V)$ est séparé et est l'image d'un connexe et compact par une application continue. Il est donc connexe et compact \square

Définition 3 : Sous-espace projectif

Soit $E \subset \mathbb{P}(V)$. E est un sous-espace projectif de $\mathbb{P}(V)$ s'il existe un sous-espace vectoriel $W \subset V$ tel que $E = \mathbb{P}(W)$.

Proposition 5 : Intersection d'espaces projectifs

Soient E, F des sous espaces projectifs de $\mathbb{P}(V)$.

(i) si $dim(E) + dim(F) \geq dim(\mathbb{P}(V))$ alors $E \cap F \neq \emptyset$

Une conséquence immédiate étant que deux droites du plan projectif se coupent toujours.

(ii) Soit H un hyperplan projectif de $\mathbb{P}(V)$ et $M \notin H$. Toute droite D passant par M coupe H en un point et un seul.

Démonstration. (i) Supposons par l'absurde que $E \cap F = \emptyset$. Si on a $\mathbb{P}(U) = E$ et $\mathbb{P}(W) = F$, on voit que $U \cap W = \{0\}$. On peut en déduire grâce à la formule de Grassmann que $dim(U) + dim(W) \leq dim(V)$. De plus, d'après la définition 7 :

$$dim(E) = dim(U) - 1 \text{ et } dim(F) = dim(W) - 1$$

$$\text{d'où } dim(U) + dim(W) \geq dim(V) + 1$$

ce qui est une contradiction.

(ii) On voit que $M \in \mathbb{P}(V)$ correspond à une droite : $M = \rho(m)$ où m est une droite de V . De même, la droite D correspond à un plan : $D = \rho(d)$ où d est un plan de V . On a également $H = \rho(h)$, avec h un hyperplan de V . On a par hypothèse $m \subset d$. Il suffit de montrer que l'intersection du plan d et de l'hyperplan h est exactement une droite.

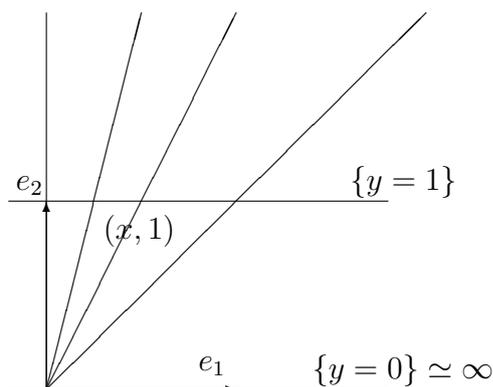
En effet, comme $M \notin H$, $V = m\mathbb{K} \oplus h$. Il est alors facile de voir que $dim(h \cap d) = 1$. \square

section Cas particuliers de la droite et du plan projectif

Proposition 6 : Droite projective

Soit V un plan de base (e_1, e_2) . On a $dim(\mathbb{P}(V)) = 1$. En notant (x, y) les coordonnées relatives à la base (e_1, e_2) , on a la bijection suivante :

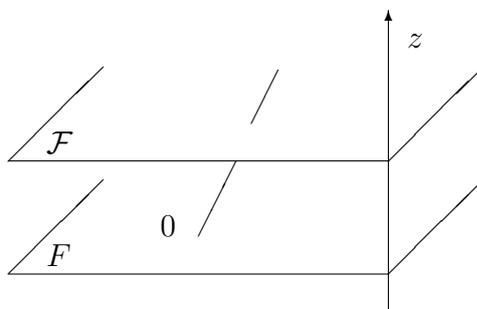
$$\begin{aligned} \{\text{droite } y = 1\} \cup \{\infty\} &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ (x, 1) &\longmapsto \mathbb{K}(x, 1) \\ \infty &\longmapsto \mathbb{K}(1, 0) \end{aligned}$$



Remarque On peut donc considérer la droite projective comme étant une droite à laquelle on a rajouté le point ∞ .

Proposition 7 : Plan projectif

On raisonne de même pour l'espace projectif de dimension 2.
 Soit V un espace vectoriel de dimension 3.
 Soit F le plan vectoriel d'équation $z = 0$ et \mathcal{F} le plan affine d'équation $z = 1$.
 On a alors une bijection : $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(F) \simeq \mathcal{F}$.
 En effet, comme F est la direction de \mathcal{F} , toute droite de $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(F)$ intersecte \mathcal{F} .
 Réciproquement, un point de (F) définit une unique droite vectorielle qui n'est pas incluse dans F .



Remarque Ici, on considère le plan projectif comme étant un plan auquel on rajoute la droite projective définie précédemment.

2.1.1 Complétion projective d'un espace affine

Nous allons généraliser les raisonnements menés sur la droite et l'espace projectif. Soit \mathcal{F} un espace affine de dimension n et de direction F . Plus précisément, on a $\mathcal{F} = x + F$. On considère alors l'espace vectoriel

$$E = F \oplus \mathbb{K}$$

On a alors $F = \{x_{n+1} = 0\}$. En fait, on a plongé \mathcal{F} dans E et on a l'isomorphisme : $\mathcal{F} \simeq F \oplus \{1\}$. Le même raisonnement que dans le cas du plan projectif permet de montrer qu'il y a une bijection entre \mathcal{F} et $\mathbb{P}(V) - \mathbb{P}(F)$.

L'hyperplan $\mathbb{P}(F)$ s'appelle l'hyperplan à l'infini et est constitué des directions des droites affines de \mathcal{F} .

2.2 Homographies

Définition 4 : Homographies et groupe projectif

Soient V et V' deux espaces vectoriels. On peut considérer les applications introduites dans la définition 2 :

$$\begin{aligned} \rho : V - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}(V) \\ \rho' : V' - \{0\} &\longrightarrow \mathbb{P}(V') \end{aligned}$$

Soit $g : \mathbb{P}(V) \longrightarrow \mathbb{P}(V')$. On dit que g est une homographie si il existe un isomorphisme $f \in \mathcal{L}(V, V')$ tel que $\rho' \circ f = g \circ \rho$.

Autrement dit, g est une homographie si le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ & \longrightarrow & \\ \rho & \downarrow & \downarrow & \rho' \\ & \mathbb{P}(V) & \longrightarrow & \mathbb{P}(V') \\ & g & & \end{array}$$

L'ensemble des homographies est un groupe, appelé groupe projectif et noté $GP(V)$.

Proposition : Caractérisation du groupe projectif

$$\begin{aligned} \Phi : GL(V) &\longrightarrow GP(V) \\ f &\longmapsto g \end{aligned} \quad \text{est un morphisme de groupe.}$$

Il induit l'isomorphisme suivant :

$$GP(V) \simeq GL(V)/\{\text{homothéties}\}$$

Démonstration. Tout d'abord, l'application Φ est bien définie car l'homographie g est uniquement déterminée par l'isomorphisme f (il est linéaire).

Pour montrer que l'application $GL(V) \longrightarrow GP(V)$ est bien un morphisme, il faut montrer que pour f et f' , $\Phi(f \circ f') = \Phi(f) \circ \Phi(f')$.

En effet, on sait que $\rho \circ f = \Phi(f) \circ \rho$. Ainsi, $\rho \circ f \circ f' = \Phi(f) \circ \rho \circ f'$ et donc $\rho \circ f \circ f' = \Phi(f) \circ \Phi(f') \circ \rho$ ce qui signifie d'après la définition 4 que $\Phi(f \circ f') = \Phi(f) \circ \Phi(f')$. De plus, d'après la définition 4, ce morphisme est surjectif. Pour montrer l'isomorphisme annoncé, il suffit donc de montrer que son noyau est constitué des homothéties.

Soit $f \in GL(V)$ tel que $\Phi(f) = Id$. On voit d'après la définition 4 que $\rho \circ f = \rho$. Ainsi, f fixe toutes les droites et est donc une homothétie. Réciproquement, toute homothétie est un élément du noyau. On a donc l'isomorphisme $GP(V) \simeq GL(V)/\{\text{homothéties}\}$ \square

2.2.1 Coordonnées homogènes et repères projectifs

Définition 5 : Coordonnées homogènes

Soit (e_1, \dots, e_{n+1}) une base de V .
 On considère l'action par multiplication de \mathbb{K}^* sur $V \setminus \{0\}$. On note $[x_1, \dots, x_{n+1}]$ la classe d'équivalence de $m = (x_1, \dots, x_{n+1})$. On les appelle les coordonnées homogènes de m .

Remarque : $\rho(e_1), \dots, \rho(e_{n+1})$ ne déterminent pas (e_1, \dots, e_{n+1}) même à un coefficient multiplicatif près. En fait, on a : pour tout i , $\rho(e_i) = \lambda_i e_i$ mais les λ_i sont tous distincts. Par contre, si on considère le $(n + 2)$ -ième point $\rho(e_1 + \dots + e_{n+1})$, on peut reconstituer les vecteurs e_1, \dots, e_{n+1} à un unique coefficient près.

Définition 6 : Repère projectif

Soit V un espace vectoriel de dimension $n + 1$ et (e_1, \dots, e_{n+1}) une base de V .
 Un repère projectif de $\mathbb{P}(V)$ est un système de $n + 2$ points (m_0, \dots, m_{n+1}) de $\mathbb{P}(V)$ tels que m_1, \dots, m_{n+1} soient les images respectives de e_1, \dots, e_{n+1} et que m_0 soit l'image de $\sum_{i=1}^{n+1} e_i$ par l'application ρ .

On a alors, comme on l'attend, le résultat suivant :

Lemme 3

Si deux bases (e_i) et (e'_i) sont telles que $\rho(e_i) = \rho(e'_i) = m_i$ et $\rho(\sum_{i=1}^{n+1} e_i) = \rho(\sum_{i=1}^{n+1} e'_i) = m_0$, alors elles sont proportionnelles.

Démonstration. Les vecteurs e_i et e'_i dirigent la droite vectorielle m_i donc $e'_i = \lambda_i e_i$ pour un scalaire non nul λ_i (ceci pour $1 \leq i \leq n + 1$). De même, le vecteur $\sum_{i=1}^{n+1} e'_i$ est proportionnel au vecteur $\sum_{i=1}^{n+1} e_i$ et donc il existe $\lambda \neq 0$ tel que

$$\sum_{i=1}^{n+1} \lambda_i e_i = \lambda (\sum_{i=1}^{n+1} e_i)$$

Comme nous avons à faire à une base, on a $\lambda_i = \lambda$ pour tout i , et les deux bases sont proportionnelles. □

Proposition 10 : Lien Homographies / Repères projectifs

(i) Toute homographie envoie un repère projectif sur un repère projectif.

(ii) La donnée de deux repères projectifs (m_i) et (m'_i) respectivement de V et V' définit sans ambiguïté une homographie telle que pour tout i , $m'_i = g(m_i)$.

Démonstration. L'assertion (i) est claire. Montrons l'assertion (ii) :

On choisit des bases (e_1, \dots, e_{n+1}) de V et (e'_1, \dots, e'_{n+1}) de V' telles que :

$$\rho(e_i) = m_i, \rho(e'_i) = m'_i, \text{ pour } 1 \leq i \leq n + 1 \text{ et } \rho(\sum_{i=1}^{n+1} e_i) = m_0, \rho(\sum_{i=1}^{n+1} e'_i) = m'_0.$$

Il existe un unique isomorphisme f de V dans V' tel que $f(e_i) = e'_i$. Comme il est linéaire, on a nécessairement $f(\sum e_i) = \sum e'_i$. L'homographie g déduite de f envoie bien le premier repère sur le second.

Montrons l'unicité de l'homographie g ainsi déterminée.

Si g et g' sont deux telles homographies, l'homographie $g'^{-1} \circ g$ laisse le repère (m_0, \dots, m_{n+1}) invariant. D'après le lemme 3, elle provient d'une homothétie λId , c'est donc l'identité. \square

2.2.2 Homographies de la droite

On a vu dans les sections précédentes que un repère d'une droite projective était constitué de trois points distincts (même s'il suffit de deux points pour définir une droite projective : c'est la traduction projective du fait que deux vecteurs indépendants définissent un plan vectoriel). Pour connaître une homographie de la droite, il suffit donc de connaître les images de trois points.

D'après la définition 4, une homographie provient d'un isomorphisme linéaire $f : V \rightarrow V$ où V est un plan vectoriel muni d'une base (e_1, e_2) . On a

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ \text{avec } ad - bc \neq 0$$

Soit $y \neq 0$. On pose $z = \frac{x}{y}$ de sorte que $(x, y) \sim (z, 1)$. Alors si $cz + d \neq 0$, on a

$$f(z, 1) = (az + b, cz + d) \sim \left(\frac{az+b}{cz+d}, 1 \right)$$

L'image du point à l'infini $\infty = (1, 0)$ est (a, c) et celle de $(-d, c)$ est $(bc - ad, 0) \sim (1, 0) \sim \infty$.

Proposition 11

Avec les notations précédentes, On peut identifier l'homographie de la droite avec l'application suivant :

$$z \mapsto \frac{az+b}{cz+d}$$

avec les conventions habituelles sur l'image a/c et l'antécédent $-d/c$ de ∞ .

2.3 Birapport

Plusieurs choix sont possibles pour définir le birapport. Nous pourrions le définir par une formule. Nous avons choisi un point de vue plus géométrique.² En effet, nous avons décidé de privilégier cet aspect en raison de l'objectif clairement géométrique que nous nous sommes donnés : appréhender l'espace projectif comme un cas particulier de la Grassmannienne.

2. cette approche est un mélange des approches de Michèle Audin [4] et de Rached Mneimé [12]

2.3.1 Introduction du birapport

On considère un plan vectoriel V .

On considère l'action de $GL(V)$ sur la droite projective $\mathbb{P}(V)$ définie par

$$f \cdot D = f(D)$$

D'après le théorème de la base incomplète, cette action est transitive.

Soient $D_1, D_2, \Delta_1, \Delta_2$ quatre droites du plan telles que $D_1 \neq D_2$ et $\Delta_1 \neq \Delta_2$. On sait d'après un résultat classique d'algèbre linéaire qu'il existe un isomorphisme f envoyant D_1 sur Δ_1 et D_2 sur Δ_2 .

Autrement dit, l'action de $GL(V)$ sur $(\mathbb{P}(V))^2$ est transitive.

On a un résultat similaire permettant d'envoyer trois droites quelconques sur trois autres droites. Plus précisément, pour $D_1, D_2, D_3, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ des droites du plan V telles que $D_i \neq D_j$ et $\Delta_i \neq \Delta_j (i \neq j)$, il existe $f \in GL(V)$ tel que

$$\forall i \in \{1, 2, 3\}, f \cdot D_i = \Delta_i$$

Cela est simplement la traduction du fait qu'un repère de la droite projective est donné par trois points. La proposition 12 nous assure de l'existence d'une homographie envoyant un repère sur un autre. L'isomorphisme associé à cette homographie envoie donc les trois droites D_i sur les trois droites Δ_i .

Cependant, nous donnons également une preuve plus élémentaire et plus instructive : Soient v_3 et w_3 des vecteurs directeurs respectivement des droites D_3 et Δ_3 . Comme $V = D_1 \oplus D_2$, il existe des vecteurs v_1 et v_2 directeurs des droites D_1 et D_2 tels que $v_3 = v_1 + v_2$. De même, il existe w_1 et w_2 dirigeants les droites Δ_1 et Δ_2 tels que $w_3 = w_1 + w_2$. D'après la remarque précédente, il existe un isomorphisme f envoyant v_1 vers w_1 et v_2 vers w_2 . Par linéarité de f , on voit que $f(v_3) = w_3$. Ainsi, les trois droites D_1, D_2 et D_3 sont envoyées respectivement sur Δ_1, Δ_2 et Δ_3 .

Ce résultat n'est plus vrai lorsque l'on considère quatre droites quelconques. Nous allons poser une condition sur ces quatre droites afin que l'existence d'un tel isomorphisme soit assuré : il s'agit du birapport !

Définition 7 : birapport

Soit D une droite projective. On considère un repère projectif formé de trois points a, b et c . D'après la proposition 6, on peut identifier $\mathbb{K} \cup \{\infty\}$ à une droite projective. Ainsi, il existe une unique homographie $g : D \rightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$ telle que

$$\begin{aligned} g(a) &= \infty \\ g(b) &= 0 \\ g(c) &= 1 \end{aligned}$$

Si d est un autre point de D , on définit le birapport de (a, b, c, d) :

$$[a; b; c; d] = g(d)$$

Par définition, le birapport vaut ∞ quand $d = a$, 0 quand $d = b$ et 1 quand $d = c$.

2.3.2 Propriétés et calcul du birapport

Remarque 1

Le birapport est un élément de $\mathbb{K} - \{0, 1\}$ si et seulement si les quatre points sont distincts. De plus, Pour tout $k \in \mathbb{K} \cup \infty$, il existe un et un seul point d sur la droite D tel que $[a, b, c, d]$.

Ces deux remarques sont basées sur le fait que l'homographie g est bijective.

Proposition 13 : Conservation du birapport par les homographies

Soient a_1, a_2, a_3 et a_4 quatre points de D (les trois premiers étant distincts) et a'_1, a'_2, a'_3 et a'_4 quatre points d'une droite D' (vérifiant la même hypothèse). On a l'équivalence suivante :

$$\text{Il existe une homographie } h : D \longrightarrow D' / h(a_i) = a'_i \iff [a_1; a_2; a_3; a_4] = [a'_1; a'_2; a'_3; a'_4]$$

Démonstration. C'est une conséquence de la définition 7.

\implies Supposons d'abord que $h : D \longrightarrow D'$ soit une homographie qui envoie a_i sur a'_i . Soit

$$g' : D' \longrightarrow \mathbb{K} \cup \{\infty\}$$

l'unique homographie qui envoie a'_1 sur ∞ , a'_2 sur 0 et a'_3 sur 1.

On a $[a'_1; a'_2; a'_3; a'_4] = g'(a'_4)$. Mais alors $g' \circ h$ est une (et donc l'unique) homographie qui envoie a_1 sur ∞ , a_2 sur 0 et a_3 sur 1. Donc

$$[a_1; a_2; a_3; a_4] = g' \circ h(a_4) = g'(a'_4) = [a'_1; a'_2; a'_3; a'_4]$$

\impliedby Réciproquement, il y a une unique homographie h qui envoie a_i sur a'_i , pour $(i \leq 3)$. Il reste à vérifier que $h(a_4) = a'_4$ ce qui est vraie d'après l'implication \implies . \square

Ce résultat est important et explique l'utilité du birapport présenté en introduction (6.1).

Corollaire 1

Soit V un plan vectoriel.

Si D_1, D_2, D_3 et D_4 sont quatres droites distinctes ainsi que $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ et Δ_4 , on a l'équivalence suivante :

$$\text{Il existe } f \in GL(V) / f(D_i) = \Delta_i \iff [D_1; D_2; D_3; D_4] = [\Delta_1; \Delta_2; \Delta_3; \Delta_4]$$

Démonstration. L'isomorphisme f en question est simplement l'isomorphisme associé à l'homographie h intervenant dans la proposition 13. \square

Proposition 14 : Caractérisation géométrique du birapport

³ Soit V un plan vectoriel.

Soient a, b et c trois points distincts de la droite projective $D = \mathbb{P}(V)$. Soient x et y des vecteurs de V tels que $a = p(x), b = p(y)$ et $c = p(x + y)$.⁴ On a l'équivalence suivante :

d est l'image de $hx + ky \iff [a; b; c; d]$ est l'image de (h, k) dans $\mathbb{P}^1(\mathbb{K}) = \mathbb{K} \cup \{\infty\}$

En particulier, si $h, k \in \mathbb{K}^*$, $[a; b; c; d] = h/k$.

Démonstration. Comme a et b sont distincts, les vecteurs x et y forment une base de V . On considère l'isomorphisme $f : V \rightarrow \mathbb{K}^2$ qui envoie la base (x, y) sur la base canonique. L'homographie g définie par f envoie a sur ∞ , b sur 0 et c sur 1 . Elle envoie donc d sur le birapport $[a; b; c; d]$. Mais f envoie $hx + ky$ sur $(h, k) \in \mathbb{K}^2$. Ainsi, g envoie d sur l'image de (h, k) . \square

Proposition 15

⁵ Soient a, b, c et d quatre points d'une droite affine que l'on identifie à \mathbb{K} , les trois premiers étant supposés distincts. On a alors

$$[a; b; c; d] = \frac{d-b}{d-a} / \frac{c-b}{c-a}$$

Démonstration. L'unique homographie qui convient à la définition du birapport est :

$$z \mapsto \frac{z-b}{z-a} / \frac{c-b}{c-a}$$

. La formule donne bien l'image du point d . \square

2.4 Notions de bases sur les variétés

Nous allons maintenant aborder quelques notions sur les variétés différentielles. L'objectif n'est pas d'approfondir ce domaine des mathématiques⁶ mais d'appliquer quelques résultats à l'étude de l'espace projectif. Dans toute cette section, on travaillera sur le corps \mathbb{R} .

2.4.1 Cartes et Atlas

Définition 8 : Variété

Une variété topologique de dimension n est un espace topologique séparé dont tout point est contenu dans un ouvert homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^n .

³. Dans le livre [4] Géométrie de Michèle Audin, ce résultat est présenté comme un lemme servant ensuite à démontrer des formules permettant de calculer le birapport. Ici, nous nous contenterons de l'aspect géométrique

⁴. La construction de ces vecteurs est analogue à celle de l'introduction du birapport (partie 6.1)

⁵. D'autres formules peuvent être obtenues. Le lecteur intéressé pourra consulter l'ouvrage [4] (page 198-199)

⁶. Le lecteur intéressé pour consulter l'Introduction aux variétés différentielles de Lafontaine : [5]

Définition 9 : Carte

Une carte d'une variété topologique X est la donnée d'un couple (U, φ) formé d'un ouvert U de X (le domaine de la carte) et d'un homéomorphisme φ de U sur un ouvert de \mathbb{R}^n .

Définition 10 : Atlas

Un atlas de X est une famille $(U_i, \phi_i)_{i \in I}$ (pas nécessairement finie) de cartes dont les domaines U_i recouvrent X .

Remarque

Ce vocabulaire est assez explicite. En fait, on peut voir la sphère terrestre comme une variété topologique de dimension 2. Les cartes sont des représentations planes (forcément partielles car un ouvert ne peut pas être homéomorphe à un compact de \mathbb{R}^n). Un atlas d'au moins deux cartes est donc nécessaire si on veut représenter toute la terre.

Proposition 16 : Intersection de cartes

Dans le contexte précédent, on s'intéresse à un point appartenant à plusieurs domaines de cartes : Si deux cartes (U, φ) et (V, ψ) sont telles que $U \cap V \neq \emptyset$, alors

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V) \text{ est un homéomorphisme.}^7$$

Cette application permet de passer d'une carte à une autre. Dans la suite de cette section nous définirons un atlas de l'espace projectif et décrirons ce changement de cartes.

2.4.2 Application à l'espace projectif

Nous présentons les aspects théoriques associés à l'exemple de la droite projective.

Définition 11 : Atlas sur l'espace projectif

Pour $x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, on note $[x] = [x_0, \dots, x_n]$ le point de coordonnées homogènes x . On va munir $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ d'un atlas et donc d'en faire une variété. Posons

$$V_i = \{x = (x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1} / x_i \neq 0\} \text{ (pour } 1 \leq i \leq n)$$

De plus, on définit les application $\varphi_i : V_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$ par

$$\varphi_i(x) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \overbrace{\frac{x_i}{x_i}}^{\text{omisé}}, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

où le signe $\overbrace{\phantom{\frac{x_i}{x_i}}}$ signifie que le terme correspondant est omis. Ce sont des applications continues et

7. On peut même montrer dans le cas d'un espace euclidien qu'il s'agit d'un difféomorphisme. Une preuve est disponible sur [5] de Lafontaine

$$\varphi(x) = \varphi(y) \text{ si et seulement si } \rho(x) = \rho(y)$$

De plus, $U_i = \varphi_i(V_i)$ est un ouvert de $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ car on a en fait :

$$U_i = \{[x_0; \dots; x_n] / x_i \neq 0\} = \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) - \{ \text{droite } x_i = 0 \}$$

. Par passage au quotient, on obtient ensuite une application bijective et continue $\phi_i : U_i \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Explicitement :

$$\phi_i(p(x)) = \left(\frac{x_0}{x_i}, \dots, \overbrace{\frac{x_i}{x_i}}^1, \dots, \frac{x_n}{x_i} \right)$$

L'application réciproque est donnée par

$$\phi_i^{-1}(y_0, \dots, y_{n-1}) = \rho(y_0, \dots, y_{i-1}, 1, y_{i+1}, \dots, y_{n-1})$$

ce qui montre que ϕ_i est un homéomorphise de U_i sur \mathbb{R}^n .

Proposition 17 : Changement de cartes

Les fonctions de transition $\phi_i \circ \phi_j^{-1}$ sont des homéomorphismes de $\phi_j(U_i \cap U_j)$ sur $\phi_i(U_i \cap U_j)$. Plus précisément, pour $y_i \neq 0$, on a

$$(\phi_i \circ \phi_j^{-1})(y_0, \dots, y_{n-1}) = \left(\frac{y_0}{y_i}, \dots, \frac{y_{i-1}}{y_i}, \frac{1}{y_i}, \dots, \overbrace{\frac{y_i}{y_i}}^1, \dots, \frac{y_{n-1}}{y_i} \right)$$

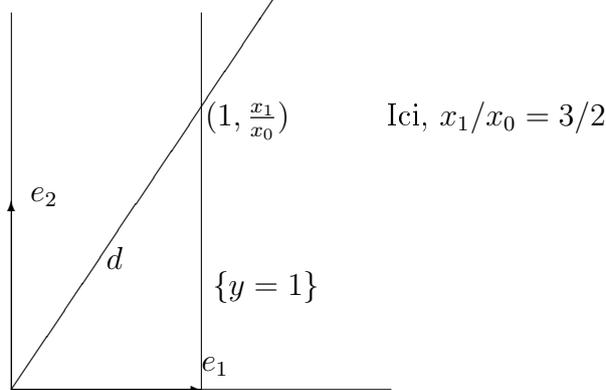
Exemple de la droite projective

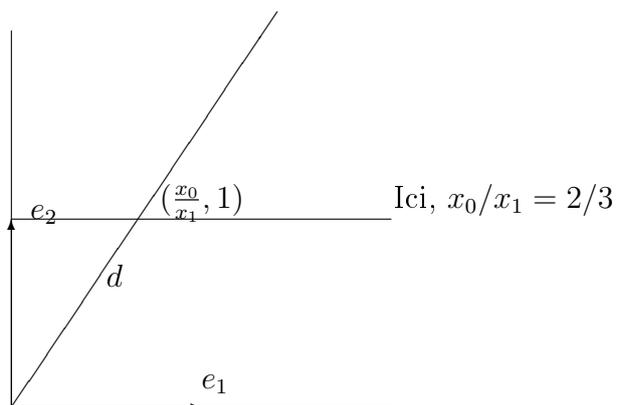
Nous allons illustrer les résultats précédents par ce cas particulier. On considère le plan \mathbb{R}^2 muni de sa base canonique (e_0, e_1) . Avec les notations de la définition 32, on voit que U_1 est l'ensemble des droites du plan privé de la droite d'équation $y = 0$. Ceci correspond en fait à l'ensemble de ces supplémentaires. De même U_2 est l'ensemble des droites du plan privé de la droite d'équation $x = 0$. On a donc un recouvert la droite projective par des ouverts :

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = U_1 \cup U_2$$

Nous pouvons construire une bijection de la droite projective vers $\{x = 1\} \cup \{\infty\}$ ou encore vers $\{y = 1\} \cup \{\infty\}$. Soit donc $[x_0, x_1]$ un point de coordonnées homogènes (x_0, x_1) On représente successivement l'intersection d'une droite d du plan avec la droite $\{y = 1\}$ puis avec la droite $\{x = 1\}$.

Pour les dessins, on supposera que $(x_0, x_1) = (2, 3)$





On voit bien dans le cas de la droite projective que le changement de cartes s'effectue grâce à l'application $\phi_1 \circ \phi_2^{-1}$ qui n'est rien d'autre que l'application d'inversion. Ceci est exactement le résultat annoncé dans la proposition 17.

Ces deux figures nous montre que la droite est caractérisée par son graphe. Si l'on fixe une coordonnée, la deuxième détermine la droite.

Chapitre 3

Algèbre multilinéaire

¹ Soient U et V un espace vectoriel sur le corps \mathbb{K} que l'on supposera de dimension finie² On note U^* et V^* leur dual.

Si U, V, W sont trois espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(U, V; W)$ l'espace vectoriel des applications bilinéaires de $U \times V$ vers W .

On va d'abord définir la notion de produit tensoriel qui est un pré-requis à l'introduction de l'algèbre tensorielle.

3.1 Produit tensoriel

3.1.1 Introduction du produit tensoriel de deux espaces vectoriels

Soient U, V deux espaces vectoriels sur \mathbb{K} .

Théorème 1

(i) Il existe un espace vectoriel sur \mathbb{K} noté $U \otimes V$ qui se lit U tenseur V , et une application bilinéaire $j \in \mathcal{L}(U, V; U \otimes V)$ tels que, pour tout espace vectoriel W et toute application bilinéaire $b \in \mathcal{L}(U, V; W)$, il existe une unique application linéaire $c : U \otimes V \rightarrow W$ telle que $b = c \circ j$.

$$\begin{array}{ccc} U \times V & & \\ j \downarrow & \searrow & b \\ U \otimes V & \xrightarrow{\quad} & W \\ & c & \end{array}$$

1. nous utiliserons la référence [6] pour cette partie. L'ouvrage d'algèbre de Bourbaki- chapitre 3 du livre d'algèbre [11] permettra au lecteur intéressé d'approfondir cette notion. En particulier, il définit l'algèbre extérieure non seulement sur des espaces vectoriels mais aussi sur des modules.

2. Cette hypothèse n'est pas indispensable pour définir l'algèbre extérieure et l'algèbre tensorielle. Cependant, seul le cadre de la dimension finie nous intéresse dans la suite du TER

(ii) Le couple $(U \otimes V, j)$ est unique à isomorphisme près. Cela signifie que si $(U \otimes V, j)$ et $((U \otimes V)', j')$ sont deux solutions de (i), alors il existe un unique isomorphisme $I : U \otimes V \rightarrow (U \otimes V)'$ tel que $j' = I \circ j$.

Démonstration. (i) Existence : Il s'agit de construire une solution. Pour cela, notons $\mathbb{K}^{(U \times V)}$ l'espace vectoriel de base l'ensemble $U \times V$. C'est l'espace vectoriel des applications de $U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ nulles sauf sur un ensemble fini.

Soit $\sigma : U \times V \hookrightarrow \mathbb{K}^{(U \times V)}$ l'injection qui associe à (e, f) le (e, f) -ième vecteur de base où si l'on veut l'application de $U \times V \rightarrow \mathbb{K}$ qui vaut 1 sur (e, f) et 0 ailleurs.

Cette injection σ n'est ni linéaire, ni bilinéaire. L'objectif est de quotienter $\mathbb{K}^{(U \times V)}$ pour "tuer les problèmes" qui empêchent à σ d'être bilinéaire. En effet, considérons $R(U, V)$ le sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^{(U \times V)}$ engendré par les éléments (que l'on veut "rendre" nuls) :

$$\sigma(ae + be', cf + df') - ac\sigma(e, f) - ad\sigma(e, f') - bc\sigma(e', f) - bd\sigma(e', f')$$

Posons alors

$$U \otimes V = \mathbb{K}^{(U \times V)} / R(U, V) \text{ et } j : U \times V \rightarrow U \otimes V, j = R \circ \sigma$$

où R est la surjection canonique

L'application j est bien bilinéaire. (on a tout fait pour!)

Si $b : U \times V \rightarrow W$ est une application bilinéaire, on définit $\tilde{c} : \mathbb{K}^{(E \times F)} \rightarrow W$ comme étant l'application linéaire qui envoie l'élément de base (e, f) sur $b(e, f)$. cette application linéaire \tilde{c} est nulle sur $R(E, F)$ et définit donc par passage au quotient une application linéaire $c : \mathbb{K}^{(U \times V)} / R(U, V) \rightarrow W$ telle que $b = c \circ j$. L'unicité d'un tel c est évident. Cela montre que le couple $(\mathbb{K}^{(U \times V)} / R(U, V), j)$ vérifie (i).

(ii) Unicité : Comme $(U \otimes V, j)$ est solution de (i), il existe un unique $\alpha : U \otimes V \rightarrow (U \otimes V)'$ linéaire telle que $j' = \alpha \circ j$ et de même il existe un unique $\beta : (U \otimes V)' \rightarrow U \otimes V$ linéaire telle que $j = \beta \circ j'$.

On a donc $j = (\beta \circ \alpha) \circ j$ et l'unicité de l'application linéaire c requise en (i) montre que $\beta \circ \alpha = Id_{U \otimes V}$. □

Remarque 2

Le produit tensoriel $U \otimes V$ peut être regardée comme l'ensemble des combinaisons linéaires à coefficients dans \mathbb{K} de mots à deux lettres : la première dans U et la seconde dans V .

Dans la preuve, quotienter par $R(E, F)$ permet de "rassembler" les mêmes mots et de les additionner. On obtient bien ainsi une combinaison linéaire.

Ces mots de la forme $j(u, v)$ se notent $u \otimes v$ et se lit u tenseur v .

Remarque 3

L'ensemble des applications bilinéaires de $U \times V \rightarrow W$ s'identifie à l'ensemble des applications linéaires de $U \otimes V \rightarrow W$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(U, V; W) &\simeq \mathcal{L}(U \otimes V, W) \\ b &\longmapsto c \end{aligned}$$

Exemple

Nous avons l'isomorphisme $\mathbb{K} \otimes V \simeq V$. En effet, il suffit de considérer l'application $v \mapsto 1 \otimes v$ et son application inverse $k \otimes v \mapsto k.v$ qui sont toutes les deux des morphismes.

3.1.2 Propriétés du produit tensoriel

Proposition 18

Le produit tensoriel vérifie les propriétés suivantes :

(i) Commutativité :

$$\begin{aligned} U \otimes V &\simeq V \otimes U \\ u \otimes v &\longmapsto v \otimes u \end{aligned}$$

(ii) Associativité :

$$(U \otimes V) \otimes W \simeq U \otimes (V \otimes W)$$

(iii) On a les règles de calcul suivantes :

$$\forall \lambda, \mu, \lambda', \mu' \in \mathbb{K}, \forall u, u' \in U, \forall v, v' \in V \\ (\lambda u + \lambda' u') \otimes (\mu v + \mu' v') = \lambda \mu (u \otimes v) + \lambda \mu' (u \otimes v') + \lambda' \mu (u' \otimes v) + \lambda' \mu' (u' \otimes v') \in U \otimes V$$

(iv) $U \otimes V$ est engendré par les éléments de la forme $u \otimes v$ que l'on appelle les tenseurs élémentaires ou encore tenseurs purs.

Démonstration. Cela est claire en considérant la remarque 2 □

Proposition 19 : Commutation du produit tensoriel et des sommes directes

Soit $U_{i \in I}$ une famille d'espaces vectoriels et V un espace vectoriel. On a

$$(\bigoplus_{i \in I} U_i) \otimes V \simeq \bigoplus_{i \in I} (U_i \otimes V)$$

Démonstration. Pour tout espace vectoriel W , on a l'isomorphisme :

$$\mathcal{L}(\bigoplus_{i \in I} U_i, V; W) \simeq \prod_{i \in I} \mathcal{L}(U_i, V; W)$$

D'après la remarque 8.1.3, on a également

$$\mathcal{L}(U_i, V; W) \simeq \mathcal{L}(U_i \otimes V; W)$$

et donc

$$\mathcal{L}(\bigoplus_{i \in I} U_i, V; W) \simeq \prod_{i \in I} \mathcal{L}(U_i \otimes V; W) \simeq \mathcal{L}(\bigoplus_{i \in I} (U_i \otimes V); W)$$

Par ailleurs, on a par définition, pour tout W ;

$$\mathcal{L}(\bigoplus_{i \in I} U_i, V; W) = \mathcal{L}((\bigoplus_{i \in I} U_i) \otimes V; W)$$

et donc

$$\mathcal{L}(\bigoplus_{i \in I} (U_i \otimes V); W) \simeq \mathcal{L}((\bigoplus_{i \in I} U_i) \otimes V; W)$$

Comme les espaces vectoriels sont de dimension finie, on a le résultat souhaité.³ \square

Corollaire 2 : base du produit tensoriel

Soit $(u_i)_{i \in I}$ est une base de U et $(v_j)_{j \in J}$ une base de V . Une base de $U \otimes V$ est donnée par les éléments

$$u_i \otimes v_j \text{ pour } (i, j) \in I \times J$$

En particulier,

$$\dim(U \otimes V) = \dim(U) \times \dim(V)$$

Démonstration. Concrètement, que $(u_i)_{i \in I}$ soit une base de U signifie que $U \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathbb{K}u_i$. De même, on a $V \simeq \bigoplus_{j \in J} \mathbb{K}v_j$. Ainsi,

$$U \otimes V \simeq \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} (\mathbb{K}u_i \otimes \mathbb{K}v_j) \simeq \bigoplus_{(i,j) \in I \times J} \mathbb{K}(u_i \otimes v_j)$$

\square

3.1.3 Produit tensoriel d’applications linéaires

Nous avons fait le choix de ne présenter qu’une définition dans cette section⁴

Définition 12

Soient U, V, U' et V' quatre espaces vectoriels sur \mathbb{K} et les deux applications linéaires suivantes :

$$\begin{aligned} f &: U \longrightarrow V \\ f' &: U' \longrightarrow V' \end{aligned}$$

Il existe une unique application linéaire notée $f \otimes f' : U \otimes U' \longrightarrow V \otimes V'$ caractérisée par la formule :

$$f \otimes f'(u \otimes u') = f(u) \otimes f'(u')$$

3.1.4 Algèbre tensorielle

On pose $T^0(V) = \mathbb{K}$ et $T^1(V) = V$ et pour $p > 1, T^p(V) = \underbrace{V \otimes V \otimes \dots \otimes V}_{p \text{ fois}}$

3. Ceci reste vrai en dimension quelconque mais la démonstration est plus délicate

4. Le lecteur pourra se familiariser avec quelques exemples classiques dans le [6]

Définition 13

On appelle algèbre tensorielle de V que l'on note $T^*(V) = \bigoplus_{p \geq 0} T^p(V)$. On considère le produit évident $T^p(V) \times T^q(V) \longrightarrow T^{p+q}(V)$ qui associe à

$$x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p \text{ et } y_1 \otimes y_2 \otimes \dots \otimes y_q \longmapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_p \otimes y_1 \otimes \dots \otimes y_q$$

Ce produit en fait une algèbre associative, d'unité $1 \in \mathbb{K}$, mais non commutative

Remarque 4

De la même manière que pour la remarque 2, on peut voir $T^p(V)$ comme étant l'ensemble des combinaisons linéaires des mots formés de p lettres. Ainsi, l'algèbre tensorielle est l'ensemble des combinaisons linéaires des mots finis. Tous ces mots sont formés à partir de lettres d'une base quelconque de V .

3.2 Algèbre symétrique

Dans cette très courte section nous allons définir l'algèbre symétrique. Nous aimerions considérer les mots de l'algèbre extérieure indépendamment de l'ordre des lettres. Plus précisément, nous souhaiterions que

$$\forall \sigma \in \mathcal{S}_p, x_{\sigma(1)} \otimes x_{\sigma(2)} \otimes \dots \otimes x_{\sigma(p)} = x_1 \otimes x_2 \otimes \dots \otimes x_p$$

On considère donc l'idéal bilatéral Π engendré par les éléments de la forme :

$$x \otimes y - y \otimes x$$

Ensuite, on réalise le quotient $T^*(V)/\Pi$. On obtient ainsi l'algèbre symétrique qui n'est rien d'autre que l'algèbre des polynômes à plusieurs variables sur V .

Nous allons maintenant réaliser le même processus pour définir l'algèbre extérieure.

3.3 Algèbre Extérieure

Définition 14 : Algèbre extérieure

On considère l'idéal bilatère $\bigwedge^p V$ engendré par les éléments de la forme :

$$x \otimes y + y \otimes x$$

.

On appelle $\bigwedge^p V$ la puissance extérieure p-ième de V

On réalise donc le quotient $T^*(V)/\bigwedge^p V$.

On note $x_1 \wedge \dots \wedge x_p$ la classe dans ce quotient de l'élément $x_1 \otimes \dots \otimes x_p$.⁵

On définit l' $\bigwedge^*(V) = \bigoplus_{p \geq 0} \bigwedge^p V = \mathbb{K} \otimes V \otimes \bigwedge^2 V \otimes \dots$

Le produit $T^p(V) \times T^q(V) \longrightarrow T^{p+q}(V)$ passe au quotient et induit un produit dit "produit extérieur" $\bigwedge : \bigwedge^p V \times \bigwedge^q V \longrightarrow \bigwedge^{p+q} V$.

5. Le symbole \wedge se lit "extérieur"

Remarque : A propos de la définition 14

On aurait également pu définir $\bigwedge^p V$ comme étant l'ensemble des éléments $x_1 \otimes \dots \otimes x_p$ tels que $x_i = x_j$ pour deux indices $i \neq j$.

En effet, montrons que pour tout $x \in V$, $x \wedge x = 0$: Pour tout $y \in V$, on a $(x+y) \wedge (x+y) = x \wedge x + x \wedge y + y \wedge x + y \wedge y = x \wedge x + y \wedge y$. Ainsi, pour $y = -x$, on voit que $x \wedge x = 0$ si la caractéristique de \mathbb{K} est différente de 2.

Définition 15 : Forme alternée

On appelle p-forme linéaire alternée sur U , à valeur dans V une application p-linéaire $U^p \rightarrow V$, nulle dès que deux vecteurs sont égaux.

Proposition 20 : Caractérisation des formes alternées

Pour toute application p-linéaire alternée $\rho : U^p \rightarrow V$, il existe une unique application linéaire $f : \bigwedge^p U \rightarrow V$ telle que $\rho = f \circ c$ où c est l'application p-linéaire alternée définie par

$$c(x_1, \dots, x_p) = x_1 \wedge \dots \wedge x_p.$$

Proposition 21 : Base d'une puissance extérieure

Soit e_1, \dots, e_n une base de V de dimension n . Les éléments suivants forment une base de $\bigwedge^p V$:

$$e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p} \text{ où } 1 \leq i_1 < \dots < i_p \leq n$$

En particulier, la dimension de $\bigwedge^p V$ est donc $\binom{n}{p}$.

Démonstration. Le fait qu'il s'agit d'une famille génératrice découle directement de la formule suivante :

$$\forall X \in \bigwedge^p V, \forall Y \in \bigwedge^q V, \quad X \wedge Y = (-1)^{pq} Y \wedge X \in \bigwedge^{p+q} V$$

découlant elle-même de la définition 14.

□

Proposition 22

Soient $v_1, \dots, v_p \in V$ des vecteurs linéairements indépendants. On a l'équivalence suivante :

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_p \wedge x = 0 \iff x \in \langle v_1, \dots, v_p \rangle$$

Démonstration. \Leftarrow Supposons que $x \in \langle v_1, \dots, v_p \rangle$. Alors $x = \sum_{i=1}^p x_i v_i$ et d'après la remarque précédente à propos de la définition 14 ainsi que la multi-linéarité du produit extérieur, on voit que $v_1 \wedge \dots \wedge v_p \wedge x = \sum x_i v_1 \wedge \dots \wedge v_p \wedge v_i = 0$.

\Rightarrow :Réciproquement, supposons que $v_1 \wedge \dots \wedge v_p \wedge x = 0$. Montrons que $x \in \langle v_1, \dots, v_p \rangle$. En effet, on complète la famille libre en base v_1, \dots, v_n . Alors x s'écrit $x = \sum_{i=1}^n x_i v_i$. Ainsi, par multi-linéarité, on a le résultat suivant :

$$\sum_{i \notin \{1, \dots, p\}} x_i v_1 \wedge \dots \wedge v_p \wedge v_i = 0$$

On voit donc que la coordonnée x_i est nulle dès que $i \notin \{1, \dots, p\}$ et donc $x \in \langle v_1, \dots, v_p \rangle$. \square

Théorème 2

Soit V un espace vectoriel de dimension finie. On a alors l'isomorphisme suivant :

$$\Lambda^p(V^*) \simeq (\Lambda^p V)^*$$

Démonstration. Remarquons que $(\Lambda^p V)^*$ est l'espace vectoriel des p -formes alternées sur V .

Soit $f_1, \dots, f_p \in (V^*)^p$ p formes linéaires sur V et considérons l'application p -linéaire alternée φ sur V qui associe à

$$X_1, \dots, X_p \longmapsto \text{le déterminant de la matrice } p \times p \text{ définie par } a_{i,j} = f_i(X_j)$$

La correspondance $(f_1, \dots, f_p) \longmapsto \varphi$ est une application p -linéaire de $(V^*)^p$ dans $(\Lambda^p V)^*$ et fournit d'après la proposition 41 une application linéaire

$$i_p : \Lambda^p(V^*) \longrightarrow (\Lambda^p V)^*$$

En fait, i_p est un isomorphisme. En effet, comme les deux espaces ont même dimensions, il suffit de montrer qu'il s'agit d'une injection :

Soit f_1, \dots, f_p p formes linéaires telles que $\varphi = i_p(f_1 \wedge \dots \wedge f_p) = 0$.

Montrons que $f_1 \wedge \dots \wedge f_p = 0$.

D'après la proposition 22, cela est le cas dès que $p \geq \dim(V)$ car les formes linéaires sont alors linéairement dépendantes.

En complétant f_1, \dots, f_p en base de V^* , on peut toujours supposer que $p = \dim(V)$. Supposons par l'absurde que $f_1 \wedge \dots \wedge f_p = 0$ et donc que f_1, \dots, f_p soient linéairement indépendantes. En considérant une base pré-duale x_1, \dots, x_p , on voit que la matrice $f_i(x_j)$ est l'identité et que son déterminant n'est pas nul, ce qui est absurde. \square

Remarque 5

La preuve du théorème précédent détaille la construction de cet isomorphisme.

En fait, on peut penser à l'élément $f_1 \wedge \dots \wedge f_p \in \Lambda^p(V^*)$ où $f_i \in V^*$ comme à la forme p -linéaire alternée sur E qui associe à X_1, \dots, X_p le déterminant de la matrice

$$A = (a_{i,j}) \text{ où } a_{i,j} = f_i(X_j)$$

Une conséquence quasi immédiate de cette remarque est la proposition suivante :

Proposition 23

Soient (u_1, \dots, u_k) et (v_1, \dots, v_k) deux bases d'un sous espace vectoriel U de V et soit A la matrice de changement de coordonnées de (u_i) vers (v_i) . Alors on a la relation suivante :

$$v_1 \wedge \dots \wedge v_k = \det(A)u_1 \wedge \dots \wedge u_k$$

Chapitre 4

Etude de la Grassmannienne

Dans la deuxième partie, nous avons pu étudier le comportement de l'espace projectif \mathbb{P}^{n-1} . Il s'agit en fait d'un cas particulier : c'est la grassmannienne $Gr_{1,n}$. Nous verrons que certaines notions présentées auparavant se généralise.

Parallèlement aux résultats théoriques, nous présenterons l'exemple $Gr_{2,4}$ tout au long de ces deux dernières parties afin d'illustrer concrètement les objets mis en jeu.

4.1 Application et coordonnées de Plücker

Dans cette section, nous allons montrer que la grassmannienne se plonge dans le projectif d'un certain espace. Nous allons utiliser quelques résultats d'algèbre multilinéaire. En effet, soit V un espace vectoriel de dimension n sur un corps \mathbb{K} et $U \subset V$ un sous-espace de dimension m admettant (u_1, \dots, u_m) comme base.

Proposition 24 : Application de Plücker

Soit l'application $P : U = \langle u_1, \dots, u_m \rangle \in Gr_{m,n} \mapsto \mathbb{K}(u_1 \wedge \dots \wedge u_m) \in \mathbb{P}(\bigwedge^m V)$ alors P est bien définie et est injective.

Démonstration. D'après la proposition 23, si l'on considère une autre base de U , le produit extérieur sera le même à une constante multiplicative près. L'application est donc bien définie à valeur dans $\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$.

Montrons maintenant l'injectivité grâce à la proposition 22

Soit (u_1, \dots, u_m) et (v_1, \dots, v_m) deux familles libres de vecteurs telles que $u_1 \wedge \dots \wedge u_m = \lambda v_1 \wedge \dots \wedge v_m$ où $\lambda \in \mathbb{K}$. Montrons qu'alors les espaces engendrés par ces deux familles sont égaux : $\langle u_1, \dots, u_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

En effet, d'après la proposition 22, le noyau de l'application

$\Psi_{u_1, \dots, u_m} : x \in V \mapsto u_1 \wedge \dots \wedge u_m \wedge x$ est $\ker(\Psi_{u_1, \dots, u_m}) = \langle u_1, \dots, u_m \rangle$.

De même on définit l'application Ψ_{v_1, \dots, v_m} et son noyau est $\ker(\Psi_{v_1, \dots, v_m}) = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

Etant donné l'égalité $u_1 \wedge \dots \wedge u_m = \lambda v_1 \wedge \dots \wedge v_m$, les deux applications sont proportionnelles

et leur noyau sont égaux. On a donc $\langle u_1, \dots, u_m \rangle = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$ ce qui prouve l'injectivité. □

Définition 16 : Coordonnées de Plücker

Soit (e_1, \dots, e_n) la base canonique de l'espace vectoriel V .
 La proposition 21 d'algèbre multilinéaire nous donne une base canonique de $\bigwedge^m V$:

$$\{e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m} / 1 \leq e_{i_1} < \dots < e_{i_m} \leq n\}$$

Soit U un sous-espace vectoriel de V de dimension m muni de la base .
 Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m}$ la matrice des coordonnées de (u_1, \dots, u_m) dans la base canonique : c'est-à-dire $\forall 1 \leq j \leq m, u_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$.
 Alors les coordonnées de $u_1 \wedge \dots \wedge u_m$ dans la base canonique de $\bigwedge^m V$ définissent $P(U)$ à une constante multiplicative près. Elles sont appelées les coordonnées de Plücker de U .

Exemple de $Gr_{2,4}$

Soit (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de V de dimension 4. La base canonique de $\bigwedge^2 V$ est donnée par :

$$\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}$$

Soit (u_1, u_2) une base de $U \in Gr_{2,4}$ avec

$$u_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 + a_{41}e_4 \text{ et } u_2 = a_{12}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 + a_{42}e_4$$

On voit que

$$u_1 \wedge u_2 = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_1 \wedge e_2 + (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12})e_1 \wedge e_3 + (a_{11}a_{42} - a_{41}a_{12})e_1 \wedge e_4 + (a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22})e_2 \wedge e_3 + (a_{21}a_{42} - a_{41}a_{22})e_2 \wedge e_4 + (a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32})e_3 \wedge e_4$$

Ainsi, on voit que les coordonnées de Plücker sont :

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}; a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}, a_{11}a_{42} - a_{41}a_{12}; a_{11}a_{42} - a_{41}a_{12}; a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}; a_{21}a_{42} - a_{41}a_{22}; a_{31}a_{42} - a_{41}a_{32})$$

On note respectivement $x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}$ ces coordonnées.

On voit qu'il s'agit en fait des mineurs d'ordre deux de la matrice $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{pmatrix}$. En effet,

$$= \left(\begin{matrix} (x_{12}, x_{13}, x_{14}, x_{23}, x_{24}, x_{34}) \\ \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right|, \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right|, \left| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{41} & a_{42} \end{matrix} \right|, \left| \begin{matrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix} \right|, \left| \begin{matrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{41} & a_{42} \end{matrix} \right|, \left| \begin{matrix} a_{31} & a_{32} \\ a_{41} & a_{42} \end{matrix} \right| \end{matrix} \right)$$

4.2 La Grassmannienne : une variété algébrique...

Nous avons montré dans la section précédente que la Grassmannienne $Gr_{m,n}$ peut être vue comme une partie de \mathbb{P}^N où $N = \binom{m}{n} - 1$. En effet, d'après la proposition 21,

$\bigwedge^m V$ est de dimension $\binom{m}{n}$.

Dans cette section, nous allons obtenir un résultat plus fin : voir la grassmannienne comme une sous variété de \mathbb{P}^N . En particulier, la grassmannienne sera une partie fermée.

4.2.1 Grassmannienne et vecteurs décomposables

Définition 17

Soit $w \in \bigwedge^m V$ et $v \in V - \{0\}$.

On dit que v divise w s'il existe $u \in \bigwedge^{m-1} V$ tel que $w = v \wedge u$

lemme 4

Soit $w \in \bigwedge^m V$ et $v \in V - \{0\}$. Alors v divise $w \iff w \wedge v = 0$

Démonstration. \Rightarrow Supposons que v divise w . Il existe donc $u \in \bigwedge^{m-1} V$ tel que $w = v \wedge u$. On a immédiatement, $w \wedge v = v \wedge u \wedge v = 0$.

\Leftarrow Réciproquement, supposons que $w \wedge v = 0$. Posons $e_1 = v \neq 0$. On peut compléter ce vecteur en une base (e_1, \dots, e_n) de V .

On a alors une base de $\bigwedge^m V$: $\{e_{i_1, \dots, i_m} = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_m} / 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n\}$

Ainsi, il existe (a_{i_1, \dots, i_m}) tels que $w = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} a_{i_1, \dots, i_m} e_{i_1, \dots, i_m}$

Comme $v \wedge w = 0$, on sait que $\sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} a_{i_1, \dots, i_m} e_1 \wedge e_{i_1, \dots, i_m} = 0$, donc $a_{i_1, \dots, i_m} = 0$ dès que $i_1 > 1$. Ainsi w est "factorisable" par $e_1 = v$:

$w = e_1 \wedge (\sum_{2 \leq i_2 < \dots < i_m \leq m} a_{1, i_2, \dots, i_m} e_{i_2} \wedge \dots \wedge e_{i_m})$ ce qui prouve que v divise w . \square

proposition 25

Soit $w \in \bigwedge^m V$. Les vecteurs divisant w forment un sous-espace vectoriel de V .

Démonstration. Immédiat grace à la caractérisation du lemme 4 et à la multi-linéarité du produit extérieur. \square

definition 18

On dit que $w \in \bigwedge^m V$ est décomposable s'il existe m vecteurs $v_1, \dots, v_m \in V$ linéairement indépendants tels que $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$

proposition 26

Soit $w \in \bigwedge^m V$. w est décomposable si et seulement si l'espace des vecteurs divisant w est dimension m .

Démonstration. \Rightarrow Supposons que $w \in \bigwedge^m V$ est décomposable.

Il existe des vecteurs v_1, \dots, v_m linéairement indépendants tels que $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_m$. Notons U le sous-espace des vecteurs divisant w .

D'après le lemme 4, $U = \{v \in V / v_1 \wedge \dots \wedge v_m \wedge v = 0\}$. De plus, la proposition 22 implique que : $v \in U \iff v$ est linéairement dépendant des vecteurs v_1, \dots, v_m

Ainsi, $U = \langle v_1, \dots, v_m \rangle$.

\Leftarrow Réciproquement, supposons que U est de dimension m .

Il admet donc une base (v_1, \dots, v_m) que l'on peut compléter en base de $V : (v_1, \dots, v_m, v_{m+1}, \dots, v_n)$.

En notant $v_{i_1, \dots, i_m} = v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_m}, \forall 1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n$, il existe (a_{i_1, \dots, i_m}) tels que :

$$w = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} a_{i_1, \dots, i_m} v_{i_1, \dots, i_m}$$

Par définition de $U, \forall j \in \{1, \dots, m\}, v_j \wedge w = 0$. Or,

$$v_j \wedge w = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} a_{i_1, \dots, i_m} v_j \wedge v_{i_1, \dots, i_m} = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n, i_k \neq j} a_{i_1, \dots, i_m} v_j \wedge v_{i_1, \dots, i_m}$$

Donc, $v_j \wedge w = 0 \iff \forall (i_1, \dots, i_m)$ tels que $j \notin \{i_1, \dots, i_m\}$, on a $a_{i_1, \dots, i_m} = 0$.

Comme, $v_1 \wedge w = \dots = v_m \wedge w = 0$, on obtient :

$\forall (i_1, \dots, i_m)$, s'il existe $k \in \{1, \dots, m\}$ tel que $k \notin i_1, \dots, i_m$, alors $a_{i_1, \dots, i_m} = 0$.

Ainsi, $a_{i_1, \dots, i_m} = 0$ sauf si $\{1, \dots, m\} \subset \{i_1, \dots, i_m\}$ et on a donc $w = a_{i_1, \dots, i_m} v_1 \wedge \dots \wedge v_m$. \square

Corollaire 3

Pour $w \in \bigwedge^m V, w \neq 0$, le sous-espace des vecteurs divisant w est de dimension inférieure ou égale à m .

Démonstration. L'idée de la preuve est la même que celle de la proposition précédente. Supposons que ce sous-espace est de dimension $k > m$.

On définit (v_1, \dots, v_k) une base de ce sous-espace que l'on complète en base de $V : (v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n)$. Alors w s'écrit $w = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} a_{i_1, \dots, i_m} v_{i_1, \dots, i_m}$ et les conditions $v_1 \wedge w = \dots = v_k \wedge w = 0$ implique comme précédemment que $a_{i_1, \dots, i_m} = 0$ sauf si $\{1, \dots, k\} \subset \{i_1, \dots, i_m\}$.

Comme $k > m, a_{i_1, \dots, i_m} = 0 \forall (i_1, \dots, i_m)$ et donc $w = 0$ ce qui est absurde. \square

Proposition 27

Soit $w \in \bigwedge^m V$. On définit l'application linéaire $\Phi_w : V \longrightarrow \bigwedge^{m+1} V$
 $v \longmapsto w \wedge v$

Alors, w est décomposable $\iff \text{Ker}(\Phi_w)$ est de dimension m .

Démonstration. Cette propriété découle des propositions précédentes. D'après le lemme 4, le noyau $\text{Ker}(\Phi_w)$ est l'ensemble des vecteurs divisant w . Nous avons prouvé dans la proposition 26 que ce sous-espace est de dimension m si et seulement si w est décomposable. \square

4.2.2 La Grassmannienne vue comme une variété

Théorème 3

L'image de $Gr_{m,n}$ par l'application de Plücker P est une variété algébrique de l'espace projectif \mathbb{P}^N où $N = \binom{m}{n} - 1$

Démonstration. $P(Gr_{m,n})$ est l'ensemble des vecteurs décomposables. Il s'agit en fait, d'après la proposition 27 de l'ensemble des droites $w\mathbb{K} \in \mathbb{P}(\wedge^m V)$ tels que $\text{Ker}(\Phi_w)$ est de dimension m .

Donc $P(Gr_{m,n}) = \{w\mathbb{K} \in \mathbb{P}(\wedge^m V) / \text{rang}(\Phi_w) = n - m\}$

De plus, l'application $V \rightarrow \text{Hom}(V, \wedge^{m+1} V)$ est linéaire.

$$w \mapsto \Phi_w$$

Les coefficients de la matrice de Φ_w sont donc des coordonnées homogènes sur $\mathbb{P}(\wedge^m V)$.

En effet, pour $w = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} a_{i_1, \dots, i_m} e_{i_1, \dots, i_m}$,

on a vu que $\Phi_w(e_j) = w \wedge e_j = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} a_{i_1, \dots, i_m} e_{i_1, \dots, i_m} \wedge e_j$. Ainsi le coefficient $(\Phi_w)_{i,j}$ est au signe près, la i ème coordonnée de Plücker de w . Φ_w peut donc être regardée comme étant un élément de $\wedge^m V$.

Or, l'application Φ_w est de rang supérieur ou égal à $n - m$ d'après le corollaire 3 et il y a égalité si et seulement si tous les mineurs de Φ_w de taille $(n - m + 1) \times (n - m + 1)$ sont nuls.

Aussi, les mineurs de tailles $(n - m + 1) \times (n - m + 1)$ correspondent à la restriction de Φ_w à un espace de dimension $n - m + 1$ puis à sa projection sur un espace de même dimension. Les mineurs sont donc des déterminant d'application linéaires dont les coefficients sont des coordonnées homogènes. Ce sont donc des polynomes homogènes en ces coordonnées. $P(Gr_{m,n}) \subset \mathbb{P}(\wedge^m V)$ peut ainsi être regardée comme une sous-variété définie par l'annulation de ces mineurs (cf exemple de $Gr_{2,4}$). \square

4.3 Relations de Plücker

Les équations obtenues dans le théorème 3, correspondant à l'annulation des mineurs, ne sont pas optimales. On peut affiner la caractérisation de la grassmannienne en établissant les relations de Plücker. C'est ce que nous nous proposons de faire dans cette section.

4.3.1 Quelques lemmes d'algèbres multilinéaires

lemme 5

¹ Soit V un espace vectoriel sur \mathbb{K} de dimension n . On note V^* son espace dual.

Soit $0 < m < n$ un entier. alors $\wedge^m V \simeq \wedge^{n-m} V^*$.

Pour décrire cet isomorphisme, prenons $w = w_1 \wedge \dots \wedge w_m \in \wedge^m V$, alors il correspond à

1. Le lecteur pourra se référer au livre de Brendam Hassett [7] (page 200-201) pour avoir une autre formulation de ce résultat.

$w^* = w_1^* \wedge \dots \wedge w_{n-m}^* \in \bigwedge^{n-m} V^*$ tel que $w^*(x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-m}) = w_1 \wedge \dots \wedge w_m \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-m}$

Remarque 6 Ici, la famille des (w_i^*) n'est pas la base duale des (w_i) . Les cardinaux ne sont pas identiques !!! Il s'agit seulement de la décomposition de w^* en produit extérieur d'éléments de V^* . La preuve montre qu'en fait, on peut comprendre les (w_i^*) comme étant la base duale d'un supplémentaire bien choisit de $\langle w_1, \dots, w_m \rangle$.

Démonstration. On a l'application $\bigwedge^m V \times \bigwedge^{n-m} V \rightarrow \bigwedge^n V \simeq \mathbb{K}$
 $(u, v) \mapsto u \wedge v$.

D'où l'isomorphisme $\bigwedge^m V \simeq (\bigwedge^{n-m} V)^* \simeq \bigwedge^{n-m} V^*$ d'après le théorème 2.
 Plus précisément, si $w = w_1 \wedge \dots \wedge w_m$ alors

$$\forall x_1, \dots, x_{n-m}, w^*(x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-m}) = w_1 \wedge \dots \wedge w_m \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-m}$$

Pour montrer que $w^* = w_1^* \wedge \dots \wedge w_{n-m}^*$ où $w_1^*, \dots, w_{n-m}^* \in V^*$, il suffit de montrer qu'il existe de tels éléments vérifiant

$$\det \begin{pmatrix} w_1^*(x_1) & \dots & w_1^*(x_{n-m}) \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n-m}^*(x_1) & \dots & w_{n-m}^*(x_{n-m}) \end{pmatrix} = w_1 \wedge \dots \wedge w_m \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-m}, \quad \forall x_1, \dots, x_{n-m}$$

Par multilinéarité du déterminant et du produit extérieur, il suffit de le montrer pour x_1, \dots, x_{n-m} une base du supplémentaire de $\langle w_1, \dots, w_m \rangle$.

Cette base étant fixée, on pose :

$$\forall 1 \leq i \leq n-m-1, w_i^*(x_j) = \delta_{i,j} \\ w_{n-m}^*(x_j) = w_1 \wedge \dots \wedge w_m \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-m} \times \delta_{n-m,j}$$

On a donc bien montré que $w^* = w_1^* \wedge \dots \wedge w_{n-m}^*$ □

proposition 28

Soit $w \in \bigwedge^m V$. Il est associé à un unique vecteur $w^* \in \bigwedge^{n-m} V^*$ d'après le lemme 20.

On définit alors l'application linéaire $\Psi_w : V^* \rightarrow \bigwedge^{n-m+1} V^*$
 $v^* \mapsto w^* \wedge v^*$

Alors le noyau $\text{Ker}(\Psi)$ est de dimension inférieure ou égale à $n-m$ et il y a égalité si et seulement si w est décomposable.

Démonstration. La preuve utilise les mêmes arguments que celle de la proposition 26. □

Nous allons maintenant trouver une équation reliant les coordonnées de Plücker caractérisant l'appartenance à la Grassmannienne. Pour cela, nous utiliserons les applications Φ_w et Ψ_w ainsi que leur noyau.

lemme 6

Pour $H \subset V^*$, on définit l'annihilateur de H comme : $H^\circ = \{v \in V / \forall h \in H, h(v) = 0\}$

On a alors le résultat suivant :

w est décomposable $\iff \text{Ker}(\Phi_w) = \text{Ker}(\Psi_w)^\circ$

Démonstration. \implies Supposons que w est décomposable, c'est-à-dire que w s'écrit $w = w_1 \wedge \dots \wedge w_m$ avec $w_1, \dots, w_m \in V$ linéairement indépendants. On a alors $w^* = w_1^* \wedge \dots \wedge w_m^*$ tel qu'il est décrit dans le lemme 5.

Montrons tout d'abord l'inclusion $\text{Ker}(\Phi_w) \subset \text{Ker}(\Psi_w)^\circ$.

Soit $v \in \text{Ker}(\Phi_w)$ et soit $h \in \text{Ker}(\Psi_w)$, il s'agit de montrer que $h(v) = 0$:

En effet, $w \wedge v = 0$ donc $v \in \langle w_1, \dots, w_m \rangle$ et de même $w^* \wedge h = 0$ donc

$h \in \langle w_1^*, \dots, w_m^* \rangle$.

Ainsi, il existe $(v_j)_{1 \leq j \leq m}$ et $(h_i)_{1 \leq i \leq m}$ tels que :

$$\begin{aligned} v &= \sum_{j=1}^m v_j \cdot w_j \\ h &= \sum_{i=1}^m h_i \cdot w_i^* \end{aligned}$$

d'où $h(v) = \sum_{i,j} v_j h_i \cdot w_i^*(w_j)$

Ainsi, il suffit de montrer que $\forall 1 \leq i \leq m, \forall 1 \leq j \leq m$, on a $w_i^*(w_j) = 0$.

Par exemple, pour $i = j = 1$, montrons que $w_1^*(w_1) = 0$:

On sait que $\forall x_1, \dots, x_{n-m} \in V, w_1^* \wedge \dots \wedge w_m^*(x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-m}) = w_1 \wedge \dots \wedge w_m \wedge x_1 \wedge \dots \wedge x_{n-m}$ donc $\forall x_2, \dots, x_{n-m}, w_1^* \wedge \dots \wedge w_m^*(w_1 \wedge x_2 \wedge \dots \wedge x_{n-m}) = 0$

D'après la remarque 5, il ne s'agit rien d'autre que du déterminant de la matrice

$$\begin{pmatrix} w_1^*(w_1) & w_1^*(x_2) & \dots & w_1^*(x_{n-m}) \\ w_2^*(w_1) & w_2^*(x_2) & \dots & w_2^*(x_{n-m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_m^*(w_1) & w_m^*(x_2) & \dots & w_m^*(x_{n-m}) \end{pmatrix}$$

Ainsi, pour $x_2, \dots, x_{n-m} \in \text{Ker}(w_1^*)$, on a $\det \begin{pmatrix} w_1^*(w_1) & 0 & \dots & 0 \\ w_2^*(w_1) & w_2^*(x_2) & \dots & w_2^*(x_{n-m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_m^*(w_1) & w_m^*(x_2) & \dots & w_m^*(x_{n-m}) \end{pmatrix} = 0$.

En développant, on obtient $w_1^*(w_1) \times \det \begin{pmatrix} w_2^*(x_2) & w_2^*(x_3) & \dots & w_2^*(x_{n-m}) \\ w_3^*(x_2) & w_3^*(x_3) & \dots & w_3^*(x_{n-m}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_m^*(x_2) & w_m^*(x_3) & \dots & w_m^*(x_{n-m}) \end{pmatrix} = 0$.

Il suffit donc de montrer que l'on peut choisir $x_2, \dots, x_{n-m} \in \text{Ker}(w_1^*)$ tels que ce déterminant soit non nul.

Remarquons tout d'abord que les w_i^* sont linéairement indépendants.

Sinon, on aurait $w_1^* \wedge \dots \wedge w_m^* = 0$ et par l'isomorphisme on aurait $w_1 \wedge \dots \wedge w_m = 0$ ce qui est impossible car ces vecteurs sont linéairement indépendants.

Par indépendance de w_1^* et w_2^* , on voit que $Ker(w_1^*) \cap Ker(w_2^*) \subsetneq Ker(w_1^*)$ est de dimension $n - 2$.

De plus, on peut choisir $x_3, \dots, x_{n-m} \in Ker(w_1^*) \cap Ker(w_2^*)$ et $x_2 \in Ker(w_1^*) - Ker(w_2^*)$. Ainsi, pour $x_3, \dots, x_{n-m} \in Ker(w_1^*) \cap Ker(w_2^*)$ et $x_2 \in Ker(w_1^*) - Ker(w_2^*)$,

$$w_1^*(w_1) \times w_2^*(x_2) \times \det \begin{pmatrix} w_3^*(x_3) & \dots & w_3^*(x_{n-m}) \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n-m}^*(x_3) & \dots & w_{n-m}^*(x_{n-m}) \end{pmatrix} = 0$$

Or, $w_2^*(x_2) \neq 0$. En raisonnant par récurrence et en choisissant bien les x_i à chaque

étape, on montre que $\det \begin{pmatrix} w_3^*(x_3) & \dots & w_3^*(x_{n-m}) \\ \vdots & & \vdots \\ w_{n-m}^*(x_3) & \dots & w_{n-m}^*(x_{n-m}) \end{pmatrix} \neq 0$. Ainsi, on a montré le

résultat annoncé : $w_1^*(w_1) = 0$.

De manière générale, permuter w_i^* avec w_1^* et w_j avec w_1 permet de montrer que $w_j^*(w_i) = 0$ pour tout i et j . On a donc montré que $h(v) = 0$ et donc que $v \in Ker(\Psi_w)^\circ$

Montrons désormais l'inclusion inverse $Ker(\Psi_w)^\circ \subset Ker(\Phi_w)$ par le même type d'arguments. Soit $v \in Ker(\Psi)^\circ$. Donc, $\forall h \in V^* / w^* \wedge h = 0$, on a $h(v) = 0$. Montrons que $w \wedge v = 0$ c'est-à-dire que $v \in \langle w_1, \dots, w_m \rangle$. On complète la famille (w_1, \dots, w_m) en base (w_1, \dots, w_n) de V . v s'écrit alors $v = \sum_{j=1}^n v_j w_j$. Or $\forall h$ tel que $w^* \wedge h = 0$, $h(v) = 0$ donc pour tous $(h_i)_{1 \leq i \leq n-m}$, $\sum_{i,j} v_j h_i \cdot w_i^*(w_j) = 0$.

Or $w_i^*(w_j) = 0$ si $1 \leq j \leq m$.

De plus, $w_1 \wedge \dots \wedge w_m \wedge w_{m+1} \wedge w_n \neq 0$ et le même type d'arguments utilisés précédemment permet de montrer le résultat suivant : $w_i^*(w_j) \neq 0$ si $m + 1 \leq j \leq n$.

Comme cette égalité est valable pour toute famille (h_i) , on voit que $v_j = 0$ pour $m + 1 \leq j \leq n$ ce que l'on cherchait à prouver.

\Leftarrow Réciproquement, supposons que $Ker(\Phi_w) = Ker(\Psi_w)^\circ$.

On va utiliser quelques considérations de dimensions développées auparavant.

En effet, on a montré dans le corollaire que $\dim(Ker(\Phi_w)) \leq m$. Par ailleurs, on a montré dans le corollaire 3 que $\dim(Ker(\Psi_w)) \leq n - m$ et donc que $\dim(Ker(\Psi_w)^\circ) \geq m$. Ainsi, comme ces deux sous-espaces sont égaux, $\dim(Ker(\Phi_w)) = \dim(Ker(\Psi_w)^\circ) = m$ ce qui implique d'après la proposition 27 que w est décomposable. □

4.3.2 Relations de Plücker et exemple

Théorème 4

On considère les applications transposées :

$$\Phi_w^t : \bigwedge^{m+1} V^* \longrightarrow V^* \text{ et } \Psi_w^t : \bigwedge^{n-m+1} V \longrightarrow V$$

Alors, $w \in Gr_{m,n} \iff \forall \alpha \in \bigwedge^{m+1} V^*, \forall \beta \in \bigwedge^{n-m+1} V, \Theta_{\alpha,\beta}[w] := \Phi_w^t(\alpha)[\Psi_w^t(\beta)] = 0$

Les $\Theta_{\alpha,\beta}[w]$ sont des polynômes quadratiques en les coordonnées de Plücker et sont appelés les relations de Plücker.

Démonstration. D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que

$$Ker(\Phi_w) = Ker(\Psi_w)^o \iff \forall \alpha, \beta, \Phi_w^t(\alpha)[\Psi_w^t(\beta)] = 0$$

D'après la définition de la transposition d'une application linéaire, on voit que $\forall \alpha, \beta, \Phi_w^t(\alpha)[\Psi_w^t(\beta)] = \alpha \circ \Phi_w(\Psi_w^t(\beta))$. Ainsi, on est rammené à montrer que

$$Ker(\Phi_w) = Ker(\Psi_w)^o \iff \Phi_w \circ \Psi_w^t = 0$$

On utilise un résultat classique d'algèbre linéaire :

L'image de Ψ_w^t est un sous-espace vectoriel de V^{**} que l'on identifie à V .

On a alors $Ker(\Psi_w)^o = Im(\Psi_w^t)$.

\implies Supposons que $Ker(\Phi_w) = Ker(\Psi_w)^o$. D'après la remarque, on sait que $Im(\Psi_w^t) = Ker(\Phi_w)$, d'où $\Phi_w \circ \Psi_w^t = 0$.

\impliedby Réciproquement, supposons que $\Phi_w \circ \Psi_w^t = 0$. On en déduit que $Im(\Psi_w^t) \subset Ker(\Phi_w)$ et donc que $Ker(\Phi_w) \subset Ker(\Psi_w)^o$. On conclut grace à un argument de dimension :

En effet, $dim(Ker(\Phi_w)) \leq m$ et $dim(Ker(\Psi_w)^o) \geq m$ d'où l'égalité. \square

Exemple de $Gr_{2,4}$ bis

Les applications Φ_w et Ψ_w

Comme précédemment, considérons (e_1, e_2, e_3, e_4) une base de V . Nous rappelons que la base canonique de $\bigwedge^2 V$ est

$$\{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}$$

Si $w = \sum a_{i,j} e_i \wedge e_j$, alors $\phi_w : v \in V \mapsto w \wedge v \in \bigwedge^3 V$ est donnée par la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} a_{23} & -a_{13} & a_{12} & 0 \\ a_{24} & -a_{14} & 0 & a_{12} \\ a_{34} & 0 & -a_{14} & a_{13} \\ 0 & a_{34} & -a_{24} & a_{23} \end{pmatrix}$$

D'après le théorème 3, la grassmannienne est l'ensemble des points d'annulation des mineurs 3×3 de cette matrice.

Par ailleurs, nous allons décrire l'application $\Psi_w : V^* \longrightarrow \bigwedge^3 V^* \simeq V$ définie dans la proposition 21.

On désigne par $(e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ la base duale de (e_1, e_2, e_3, e_4) et on considère $w = \sum a_{ij} e_i \wedge e_j$

On cherche à déterminer la matrice de Ψ_w exprimée de la base $(e_1^*, e_2^*, e_3^*, e_4^*)$ vers la base $(e_{1,2,3}^*, e_{1,2,4}^*, e_{1,3,4}^*, e_{2,3,4}^*)$ de $\bigwedge^3 V^*$ qui correspond en fait à la base (e_4, e_3, e_2, e_1) de V .

Pour cela, on veut trouver la coordonnée de $\Psi_w(e_1^*)$ devant $e_{1,2,3}^*$.

Conformément au lemme 20, on s'intéresse à la coordonnée de w^* devant $e_2^* \wedge e_3^*$. Il s'agit

au signe près de la coordonnée de w devant $e_1 \wedge e_4 : a_{14}$. Pour connaître le signe, on complète avec e_2 et e_3 tels que $e_1 \wedge e_4 \wedge e_2 \wedge e_3 = 1$. On a ainsi $w^* = e_2^* \wedge e_3^*$ et donc le coefficient recherché est $+a_{14}$.

On procède de la même manière afin de calculer tous les coefficients de cette matrice et on trouve

$$Mat(\Psi_w) = \begin{pmatrix} a_{14} & a_{24} & a_{32} & 0 \\ -a_{1,3} & a_{23} & 0 & a_{34} \\ a_{12} & 0 & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & a_{12} & a_{13} & a_{14} \end{pmatrix}$$

Relations de Plucker caractéristique de $Gr_{2,4}$

Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique différente de 2 et V un espace vectoriel de dimension 4 sur \mathbb{K} . Alors

$$w \in Gr_{2,4} \iff x_{12}x_{34} - x_{13}x_{24} + x_{14}x_{23} = 0$$

Démonstration. \implies Dans ce cas particulier, on va voir que l'on a également l'équivalence :

$$w \text{ est décomposable} \iff w \wedge w = 0$$

Soit $w \in \bigwedge^2 V$ décomposable : $w = v_1 \wedge v_2$. Alors $w \wedge w = v_1 \wedge v_2 \wedge v_1 \wedge v_2 = 0$.

On peut écrire $w = a_{12}e_1 \wedge e_2 + a_{13}e_1 \wedge e_3 + a_{14}e_1 \wedge e_4 + a_{23}e_2 \wedge e_3 + a_{24}e_2 \wedge e_4 + a_{34}e_3 \wedge e_4$. En calculant le produit, on obtient

$$w \wedge w = 2(a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})e_1 \wedge e_2 \wedge e_3 \wedge e_4$$

On a donc montré que si w est décomposable ses coordonnées vérifient la relation :

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0$$

\Leftarrow Réciproquement, supposons que w satisfait la relation suivante :

$$a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23} = 0$$

alors on voit que $w \wedge w = 0$. Montrons que w est décomposable en distinguant plusieurs cas :

1. Si on suppose que $a_{12} \neq 0$ et $a_{13} \neq 0$. On peut montrer grâce à la relation que

$$w = (a_{12}e_1 + \frac{a_{32}a_{12}}{a_{13}}e_2 + \frac{a_{23}a_{14} - a_{13}a_{24}}{a_{13}}e_4) \wedge (e_2 + \frac{a_{13}}{a_{12}}e_3 + \frac{a_{14}}{a_{12}}e_4)$$

2. Si on suppose que $a_{12} = a_{13} = 0$, alors l'équation se résume à $a_{14}a_{23} = 0$. Si $a_{14} = a_{23} = 0$, alors

$$w = (a_{24}e_2 + a_{34}e_3) \wedge e_4$$

Si $a_{14} = 0$ et $a_{23} \neq 0$, alors

$$w = (a_{23}e_2 - a_{34}e_4) \wedge (e_3 + \frac{a_{24}}{a_{23}}e_4)$$

Si $a_{14} \neq 0, a_{23} = 0$, alors

$$w = (a_{14}e_1 + a_{24}e_2 + a_{34}e_3) \wedge e_4$$

Ainsi, w est décomposable.

3. Si $a_{12} = 0$ et $a_{13} \neq 0$, la relation devient $a_{13}a_{24} = a_{14}a_{23}$ et w se décompose :

$$w = (a_{13}e_1 + a_{23}e_2 - a_{34}e_4) \wedge (e_3 + \frac{a_{14}}{a_{13}}e_4)$$

4 Si $a_{13} = 0$ et $a_{12} \neq 0$, alors

$$w = (a_{12}e_1 - a_{23}e_3 - a_{24}e_4) \wedge (e_2 + \frac{a_{14}}{a_{12}}e_4)$$

Dans tous les cas, w est décomposable □

Remarque 7 : D'après le théorème 4, on sait que

$$w \in Gr_{2,4} \iff \Phi_w \Psi_w^t = 0$$

D'après les expressions explicites de Φ_w et Ψ_w obtenues précédemment, on voit que

$$\Phi_w \Psi_w^t = (a_{12}a_{34} - a_{13}a_{24} + a_{14}a_{23})I_4$$

On retrouve donc bien la même relation en suivant la méthode théorique donnée par le théorème.

4.4 Recouvrement affine de la Grassmannienne

Nous allons montrer dans cette section que la grassmannienne $Gr_{m,n}$ peut être vue comme une réunion d'ouverts isomorphes à l'espace affine $\mathbb{K}^{m(n-m)}$. Cela est une généralisation de la section 2.4.2 (exemple de la droite projective), où l'on considérait, à partir d'une droite donnée, l'ensemble de ses supplémentaires.

Soit donc $\Gamma \subset V$ de dimension $n - m$. On définit l'ensemble de ses supplémentaires :

$$U_\Gamma = \{K \in Gr_{m,n} / K \oplus \Gamma = V\}$$

Sachant que pour tout $K \in Gr_{m,n}$, il existe un supplémentaire, on voit que :

$$Gr_{m,n} = \bigcup_{\Gamma, \dim(\Gamma)=n-m} U_\Gamma$$

Deux approches différentes vont nous permettre de montrer que les U_Γ sont des ouverts d'une part et qu'ils sont tous isomorphes à $\mathbb{K}^{m(n-m)}$ d'autre part.

Proposition 29 : U_Γ est ouvert

Soit $\Gamma \subset V$ un sous-espace de dimension $n - m$ fixé et $(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-m}})$ une base de Γ . On pose $\lambda = P(\Gamma) = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{n-m}} \in \mathbb{P}(\bigwedge^{n-m} V)$. On peut voir λ comme une forme linéaire sur $\mathbb{P}(\bigwedge^m V)$: $\forall v \in \bigwedge^m V, \lambda(v) = v \wedge \lambda \in \mathbb{K}$. Cette application linéaire est bien définie à multiplication près par un scalaire. Néanmoins, une caractérisation persiste : soit $\lambda(v)$ est nul, soit il ne l'est pas...². Ainsi, $\{v \in \bigwedge^m V / v \wedge \lambda = 0\}$ est une variété affine qui est fermée et donc $\{v \in \mathbb{P}(\bigwedge^m V) / v \wedge \lambda \neq 0\} \cap Gr_{m,n} = \{P(K), K \in Gr_{m,n} / P(K) \wedge \lambda \neq 0\}$ est un ouvert.

On a en fait : $U_\Gamma = \{P(K), K \in Gr_{m,n} / P(K) \wedge \lambda \neq 0\}$ et U_Γ est ainsi ouvert.

2. Cela le mérite bien!!!

Démonstration. Tout d'abord, précisons le rôle de λ en tant qu'application linéaire.

On complète $(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-m}})$ en base de $V : (e_{i_1}, \dots, e_{i_n})$.

$\forall v \in \bigwedge^m V, v = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq n} v_{i_1, \dots, i_m} e_{i_1, \dots, i_m}$, on a $v \wedge \lambda = v_{i_{n-d+1} \dots i_n} e_{i_1, \dots, i_n}$.

Ainsi, on voit que λ sélectionne la coordonnée de Plücker devant $e_{i_{n-m+1}} \wedge \dots \wedge e_{i_n}$, c'est à dire qui correspond à un supplémentaire de Γ .

Maintenant, on montre l'égalité annoncée en montrant succesivement les deux inclusions. Soit $K \in Gr_{m,n}$ tel que $P(K) \wedge \lambda \neq 0$. Alors K est engendré par m vecteurs linéairement indépendants avec les $(e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-m}})$. On peut ainsi trouver une base de V dont les m premiers vecteurs engendrent K et les $n-m$ suivants engendrent Γ . On a donc $V = K \oplus \Gamma$ et $K \in U_\Gamma$.

Réciproquement, Soit $K \in U_\Gamma$, alors $V = K \oplus \Gamma$ et comme une base de K est linéairement indépendante avec les vecteurs $e_{i_1}, \dots, e_{i_{n-m}}$, on a $P(K) \wedge \lambda \neq 0$ \square

Maintenant, nous allons regarder les éléments de la grassmannienne comme des graphes (cf la partie géométrie projective, section 2.4.2) afin d'établir l'isomorphisme souhaité.

proposition 30 : $U_\Gamma \simeq \mathbb{K}^{m(n-m)}$

Soit $\Gamma \subset V$ un sous-espace fixé de dimension $n-m$. On fixe un sous-espace K_0 tel que $V = K_0 \oplus \Gamma$. Alors,

$$U_\Gamma \simeq Hom(K_0, \Gamma) \simeq \mathbb{K}^{m(n-m)}$$

Démonstration. Soit $\phi \in Hom(K_0, \Gamma)$. On lui associe son graphe $\{(t, \phi(t))/t \in K_0\}$ qui est isomorphe à K_0 de manière évidente et donc est un sous-espace de dimension m . Réciproquement, si l'on se donne $K \in Gr_{m,n}$ tel que $K \oplus \Gamma = V$, on peut voir K comme étant le graphe d'un certain $\phi \in Hom(K_0, \Gamma)$: Pour construire cet élément ϕ , remarquons d'abord que si $w \in K_0$, il existe un unique $u \in \Gamma$ tel que $(w, u) \in K$.

En effet, soit $w \in K_0$, il existe $k \in K, u \in \Gamma$ tels que $w = k + u$ et donc $k = w - u \in K$. Pour prouver l'unicité, prenons $u_1, u_2 \in \Gamma$ tels que $u_1 + w \in K$ et $u_2 + w \in K$. Alors en faisant la différence, $u_1 - u_2 \in K \cap \Gamma = \{0\}$ d'où $u_1 = u_2$.

Ayant construit cet élément $u \in \Gamma$ on peut donc poser $\phi(w) = u$ Ainsi on a prouvé l'identification

$$U_\Gamma \simeq Hom(K_0, \Gamma)$$

Comme $dim(K_0) = m$ et $dim(\Gamma) = n-m$, on récupère l'isomorphisme souhaité, à savoir

$$U_\Gamma \simeq \mathbb{K}^{m(n-m)}$$

\square

Chapitre 5

La Grassmannienne Lagrangienne

Dans cette partie, nous allons définir et étudier un sous ensemble de la Grassmannienne : la Grassmannienne Lagrangienne. Pour cela, nous nous intéresserons aux formes symplectiques et utiliserons donc des résultats d'algèbre linéaire et bilinéaire. Ensuite, nous verrons cet ensemble comme une variété algébrique en utilisant des raisonnements similaires de la partie 4. Enfin, nous le dénombrerons lorsqu'il est défini sur \mathbb{F}_q en revisitant les preuves de la partie 1 par les actions de groupes. En faisant réapparaître bon nombre de méthodes vues dans les parties précédentes, cette dernière partie se veut en quelque sorte une synthèse de ce TER.

5.1 Introduction et définition de la Grassmannienne Lagrangienne

5.1.1 Autour des formes symplectiques

Définition 19 : forme symplectique

Soit V un espace vectoriel sur un corps \mathbb{K} (que l'on supposera dans toute cette partie de caractéristique différente de 2). Une forme symplectique $b : V \times V \rightarrow \mathbb{K}$ est une forme bilinéaire, anti-symétrique et non dégénérée, c'est-à-dire qu'elle satisfait les conditions :

$$\begin{aligned} \forall v \in V, b(v, v) &= 0 \\ \text{et si } \forall v \in V, b(v, w) &= 0, \text{ alors } w = 0 \end{aligned}$$

Un tel espace vectoriel V muni d'une forme symplectique est appelé espace vectoriel symplectique.

Définition 20

Soit V un espace vectoriel symplectique de dimension n . Deux vecteurs v et w sont orthogonaux si $b(v, w) = 0$. On note $v \perp w$. Si W est un sous-espace de V de dimension m , on définit l'espace orthogonal de W , noté W^\perp :

$$W^\perp = \{v \in V / b(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

Proposition 32

Soit V un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$ et $W \subset V$ un sous-espace de dimension m . On a :

$$\begin{aligned} \dim(W) + \dim(W^\perp) &= 2n \\ \text{et } W^{\perp\perp} &= W \end{aligned}$$

Démonstration. On a $m = \dim(W)$. On considère (w_1, \dots, w_m) une base de W .

Alors $x \in W^\perp \iff \forall i \in \{1, \dots, m\}, b(w_i, x) = 0$

pour tout $1 \leq i \leq m$, on pose $\phi_i : x \in V \mapsto b(w_i, x) \in \mathbb{K}$.

Ainsi, on voit que $W^\perp = \bigcap_{i=1}^m \text{Ker}(\phi_i)$. Il est facile de vérifier grâce à la bilinéarité de b que les ϕ_i sont linéairement indépendants.

On obtient ainsi que $\dim(W^\perp) = \dim(\bigcap_{i=1}^m \text{Ker}(\phi_i)) = 2n - m = 2n - \dim(W)$

La formule précédente nous montre que $\dim(W^{\perp\perp}) = \dim(W)$. D'autre part, on voit facilement que $W \subset W^{\perp\perp}$ d'où l'égalité. \square

Théorème 5

Si V est un espace vectoriel symplectique sur un corps \mathbb{K} de caractéristique différente de 2, alors V est de dimension paire et il existe une base $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ telle que :

$$b(u_i, u_j) = b(v_i, v_j) = 0 \text{ et } b(u_i, v_j) = \delta_{i,j}$$

Une telle base est appelée base standard. Avec un tel choix de base, une forme symplectique peut être décrite comme suit :

$$\begin{aligned} \forall v = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n), v' = (x'_1, \dots, x'_n, y'_1, \dots, y'_n), \text{ on a} \\ b(v, v') = \sum_{i=1}^n (x_i y'_i - x'_i y_i) \end{aligned}$$

La forme ci-dessus est appelé forme symplectique standard.

Démonstration. On considère $V = \mathbb{K}^p$ et (e_1, \dots, e_p) sa base canonique. Alors une forme symplectique définit de manière unique une matrice antisymétrique : $A = (b(e_i, e_j))_{i,j}$. Alors $A^t = -A$ donc $0 \neq \det(A) = \det(A^t) = \det(-A) = (-1)^p \det(A)$ donc p est pair.

Comme b est non nulle, $\exists(\epsilon, \epsilon')$ tel que $b(\epsilon, \epsilon') \neq 0$. Alors (ϵ, ϵ') forme une famille libre, sinon on aurait $\epsilon = k\epsilon'$ par exemple et donc $b(\epsilon, \epsilon) = kb(\epsilon, \epsilon') = 0$.

On pose donc $\epsilon_1 = \frac{\epsilon'}{b(\epsilon, \epsilon')}$ et $F = \mathbb{K}\epsilon \oplus \mathbb{K}\epsilon_1$. Ainsi, $\text{mat}(b|_{F \times F}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans la base (ϵ_1, ϵ') .

Elle est donc non-dégénérée et $V = F \oplus F^\perp$.

En effet, montrons que dans ce cas, $F \cap F^\perp = \{0\}$:

Soit $x \in F \cap F^\perp$, alors $x = a\epsilon + b\epsilon_1$ avec $a, b \in \mathbb{K}$. En écrivant que $b(x, \epsilon) = b(x, \epsilon_1) = 0$, on voit que $a = b = 0$ et donc que $x = 0$.

On a de plus l'égalité des dimensions d'après la proposition 32, ce qui nous permet de conclure que $V = F \oplus F^\perp$

Ainsi, $A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ & & A' \end{pmatrix}$ avec $\det(A') \neq 0$ car b est non dégénérée, et par récurrence

sur p , il vient que $A \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ -1 & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & 1 \\ & & & -1 & 0 \end{pmatrix}$ dans une base $(\epsilon_1, \epsilon'_1, \dots, \epsilon_n, \epsilon'_n)$. Donc

en permutant lignes et colonnes, on obtient ainsi $A \equiv \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} := J_n$ dans la base $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_p, \epsilon'_1, \dots, \epsilon'_p)$ ce qui correspond matriciellement au théorème énoncé. \square

5.1.2 La Grassmannienne Lagrangienne !

Définition 21

Soit V un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$.

1. Un sous-espace $U \subset V$ est **isotrope** si $b(u, u') = 0, \forall u, u' \in U$.
2. Un sous-espace $W \subset V$ est un **sous-espace symplectique** de V si la forme symplectique sur V restreinte à W reste symplectique.
3. Un sous-espace $W \subset V$ est **co-isotrope** si W^\perp est isotrope.
4. Un sous-espace $L \subset V$ est **lagrangien** s'il est à la fois isotrope et co-isotrope

Proposition 33

Soit V un espace symplectique de dimension $2n$.

1. Si $L \subset V$ est un sous-espace lagrangien alors $L = L^\perp$ et $\dim(L) = n$.
2. Si L est isotrope et si $\dim(L) = n$ alors L est lagrangien.

Démonstration. 1. Soit L un sous-espace lagrangien. On a immédiatement $L \subset L^\perp$ car L est isotrope. De plus, L est co-isotrope d'où l'égalité. D'après la proposition 31, on voit que $\dim(L) = n$.

2. Si L est isotrope, $L \subset L^\perp$. Comme $\dim(L) = n$, alors $\dim(L^\perp) = n$ d'après la proposition 31. On a ainsi $L = L^\perp$ et L est lagrangien. \square

Définition 22

Soit V un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$. On définit $L_{n,2n}$ l'ensemble des sous-espaces lagrangiens de V . On appelle $L_{n,2n}$ la Grassmannienne Lagrangienne.

Définition 23

Soient V_1 et V_2 deux espaces vectoriels symplectiques. Soit $\phi : V_1 \rightarrow V_2$ une application linéaire. On dit que ϕ est une application symplectique si pour tout $v, w \in V_1$,

$$b(\phi(v), \phi(w)) = b(v, w)$$

On suppose maintenant que $V = V_1 = V_2$ munis de la même forme symplectique. Si $\phi : V \rightarrow V$ est une application symplectique, alors c'est un automorphisme de V .

La collection de tous les automorphismes symplectiques de V est un groupe pour la loi de composition appelé le groupe symplectique de (V, \langle, \rangle) noté $Sp(V)$. Si $V = \mathbb{K}^{2n}$ muni de la forme symplectique standard, on le note $Sp_{2n}(\mathbb{K})$

D'après la preuve du théorème 5,

$$Sp_{2n}(\mathbb{K}) = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{K}) / A^t J_n A = J_n\}$$

Lemme 7

Soit W un espace vectoriel de dimension n sur \mathbb{K} . Soit W^* son espace dual. Alors $V = W \oplus W^*$ est un espace symplectique muni de la forme suivante :

$$\begin{aligned} b : V \times V &\rightarrow \mathbb{K} \\ \text{où } \forall w_1, w_2 \in W \text{ et } f_1, f_2 \in W^* & \\ b((w_1, f_1), (w_2, f_2)) &= f_1(w_2) - f_2(w_1) \end{aligned}$$

Démonstration. On voit clairement que pour $w \in W$ et $f \in W^*$, on a $\langle (w, f), (w, f) \rangle = f(w) - f(w) = 0$.

Pour finir, soit $w \in W$ et $f \in W^*$. Alors $\forall w_0 \in W, \forall f_0 \in W^*$,

$$b((w, f), (w_0, f_0)) = f(w_0) - f_0(w) = 0$$

Ainsi, $\forall f_0 \in W^*, f_0(w) = 0$ ce qui entraîne que $w=0$ puis que $f=0$. □

Lemme 8

Soit V un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$ et $F \subset V$ un lagrangien de V . Il existe alors un lagrangien G tel que :

$$V = F \oplus G$$

Démonstration. ¹ On procède par récurrence sur la dimension de l'espace V : on pose $n = \dim(V)$ Si $n=2$, il suffit de choisir une droite vectorielle distincte de F .

Supposons maintenant le résultat vrai pour tout espace vectoriel symplectique de dimension $2(n - 1)$. Soit V un espace symplectique de dimension $2n$ muni de la forme symplectique b et soit F un lagrangien de V .

On choisit $x \in V - \{0\}$. Comme b est non-dégénérée, il existe $y \in V$ tel que $b(x, y) \neq 0$

1. La preuve est tiré du livre : "initiation aux formes quadratiques" de Seguin [9] (page 663-664). Il démontre également un résultat un peu plus fin : Si F_1 et F_2 sont deux lagrangiens, alors il existe un lagrangien F_3 qui est à la fois supplémentaire de F_1 et de F_2 .

et alors $y \notin F$ car F est lagrangien. On définit le plan $P := \langle x, y \rangle$ qui est donc régulier (la restriction de b est non-dégénérée). P^\perp est également régulier et on a $P \oplus P^\perp = V$. De plus, $G := P^\perp \cap F$ est un hyperplan de F . En effet, il peut être vu comme le noyau de la forme linéaire non nulle $b(\cdot, y)|_F$. On a même $F = \langle x \rangle \oplus G$ et G est isotrope (c'est un sous-espace de F qui est isotrope). Par ailleurs, $\dim(G) = \frac{\dim(V)}{2} - 1 = \frac{\dim(P^\perp)}{2}$ donc G est un lagrangien de P^\perp . D'après l'hypothèse de récurrence, il existe un lagrangien G_1 tel que $G_1 \oplus G = V$.

Comme $y \perp G_1$ et $V = \langle x \rangle \oplus \langle y \rangle \oplus G \oplus G_1$, on obtient que $\langle y \rangle \oplus G_1$ est un lagrangien de V et également un supplémentaire de F . \square

5.2 La Grassmannienne Lagrangienne : une autre variété algébrique...

Soit V un espace vectoriel symplectique de dimension $2n$. Nous allons montrer que $L_{n,2n}$ est un fermé dans la Grassmannienne. Soit U un sous-espace isotrope de dimension n . D'après la proposition 33, U est Lagrangien. de plus, d'après le lemme 8 d'algèbre linéaire, il existe un sous-espace linéaire isotrope tel que

$$V = U \oplus W$$

Il s'ensuit que $W \simeq U^*$, l'isomorphisme étant donné par $w \mapsto (b(w, \cdot) : U \rightarrow \mathbb{K})$. On a ainsi $V \simeq U \oplus U^*$ et la structure symplectique standard sur V est la même que celle définie dans le lemme 7.

L'objectif est maintenant de caractériser un voisinage de U dans la Grassmannienne Lagrangienne.

Définition 24

Soit $\phi : U \rightarrow U^*$ une application linéaire. On définit ϕ^* comme étant l'unique application telle que $\forall x, y \in U, \langle \phi(x), y \rangle = \langle \phi^*(y), x \rangle$ où \langle, \rangle désigne le crochet de dualité.

Lemme 9

Soit $\phi : U \rightarrow U^*$ une application linéaire. Alors

$$\phi = \phi^* \iff \text{le graphe de } \phi, \Gamma_\phi \subset U \oplus U^* \text{ est un sous-espace Lagrangien pour la structure d'espace symplectique défini au lemme 7.}$$

Démonstration. \implies Supposons que $\phi = \phi^*$. En général, on a $\text{Mat}(\phi) = \text{Mat}(\phi^*)^t$.

Soit (u_1, ϕ_1) et $(u_2, \phi_2) \in \Gamma_\phi$ le graphe de ϕ , on a :

$$b(u_1, \phi_1), (u_2, \phi_2) = \phi_{u_1}(u_2) - \phi_{u_2}(u_1) = \langle \phi(u_1), u_2 \rangle - \langle \phi(u_2), u_1 \rangle = 0 \text{ car } \phi = \phi^*.$$

\impliedby Réciproquement, supposons que Γ_ϕ est un sous-espace Lagrangien de $U \oplus U^*$. Ainsi, $\forall u_1, u_2 \in U$, on a

$$\langle \phi(u_1), u_2 \rangle = \langle \phi(u_2), u_1 \rangle .$$

Il s'en suit immédiatement que $Mat(\phi)$ est symétrique et que $\phi = \phi^*$. \square

Dans la partie précédente, on a montré que l'ensemble $Hom(U, W)$ est un voisinage de $U \in Gr_{m,n}$. En fait, l'ensemble des graphes de $Hom(U, W)$ correspond aux sous-espaces de dimension n . Ce lemme nous apporte une précision : les sous-espaces Lagrangiens correspondent aux graphes des applications linéaires telles que $\phi = \phi^*$.

Théorème 6

Soit U un sous-espace Lagrangien. Avec les notations précédentes,

$$Hom(U, W)^{Sym} = \{f : U \rightarrow W / f = f^*\} \subset Hom(U, W) \text{ est un voisinage de } U.$$

On a $Hom(U, W) \simeq \mathbb{K}^{n^2}$ et $Hom(U, W)^{Sym} \simeq \mathbb{K}^{\frac{n(n+1)}{2}}$.

De plus, on voit que $Hom(U, W)^{Sym}$ est un fermé dans $Hom(U, W)$. En effet, si $(x_{i,j})$ désigne la matrice de f , la Grassmannienne Lagrangienne est défini localement par

$$x_{i,j} = x_{j,i}$$

Ainsi, $L_{n,2n}$ est un fermé et définit une sous-variété fermée de $Gr_{n,2n}$ de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$

Exemple de $Gr_{2,4}$ ter

$$U \in L_{2,4} \iff U \in G(2, 4) \text{ et } \forall u, v \in U; b(u, v) = 0$$

On exprime cette condition en terme de coordonnées de Plücker.

Soit $w \in L_{2,4}$. Comme $w \in Gr_{2,4}$, on sait que $w = u_1 \wedge u_2$ et que ses coordonnées de Plücker verifient

$$x_{14}x_{23} - x_{24}x_{13} + x_{12}x_{34} = 0$$

De plus $\langle u_1, u_2 \rangle = 0$. Si on a,

$$u_1 = a_{11}e_1 + a_{21}e_2 + a_{31}e_3 + a_{41}e_4 \text{ et } u_2 = a_{21}e_1 + a_{22}e_2 + a_{32}e_3 + a_{42}e_4$$

cela implique que $b(u_1, u_2) = (a_{11}a_{32} - a_{31}a_{12}) + (a_{21}a_{42} - a_{41}a_{22})$, ce qui se traduit en terme de coordonnées de Plücker par

$$x_{13} + x_{24} = 0$$

En combinant les deux équations, on obtient la relation suivante

$$w \in L_{2,4} \iff x_{13}^2 = -(x_{14}x_{23} + x_{12}x_{34})$$

5.3 Dénombrement de $L_{n,2n}(\mathbb{F}_q)$

Dans cette section, nous nous proposons comme il est indiqué dans son titre de calculer le cardinal de $L_{n,2n}(\mathbb{F}_q)$.

5.3.1 Action sur la Grassmannienne Lagrangienne

Dans la proposition 2, on a calculé le cardinal de la Grassmannienne grâce à la transitivité de l'action de GL_n sur $Gr_{m,n}$. On utilisait activement le théorème de la base incomplète. Dans cette section, on se propose de calculer le cardinal de la Grassmannienne Lagrangienne en montrant tout d'abord que le groupe symplectique Sp_{2n} agit transitivement dessus.

Proposition 34

Soit \mathbb{K} un corps de caractéristique différente de 2. Le groupe symplectique $Sp_{2n}(\mathbb{K})$ agit transitivement sur la Grassmannienne Lagrangienne $L_{n,2n}$. Autrement dit, pour tous $L_1, L_2 \in L_{n,2n}$, il existe $\phi \in Sp(V)$ tel que :

$$\phi(L_1) = L_2$$

Une conséquence immédiate étant que pour $X \in L_{n,2n}$:

$$|L_{n,2n}(\mathbb{F}_q)| = \frac{|Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)|}{|Stab(X)|}$$

Démonstration. Soient $L_1, L_2 \in L_{n,2n}$. Ce théorème se prouve en considérant des bases symplectiques adaptées.

En effet, d'après la démonstration constructive du théorème 5, il existe une base (x_1, \dots, x_n) de L_1 . D'après le lemme 8, il existe un sous-espace lagrangien K_1 tel que

$$L_1 \oplus K_1 = V$$

Comme L est isotrope, on voit que $b(x_i, x_j) = 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$. Montrons que cette famille se complète en une base symplectique de V :²

Il existe $x_{n+1} \in K_1$ tel que $b(x_1, x_{n+1}) \neq 0$ car sinon $x_1 \in K_1^\perp = K_1$ ce qui est impossible. On peut toujours supposer, quitte à diviser x_{n+1} par un scalaire que $b(x_1, x_{n+1}) = 1$.

On considère alors l'application linéaire $\phi : x \mapsto b(x, x_{n+1})$.

Son noyau étant de dimension $2n - 1$, on voit que $\dim(L_1 \cap \ker \phi) \geq n - 1$.

On peut donc modifier les vecteurs x_2, \dots, x_n tels que $b(x_i, x_{n+1}) = 0$. De la même manière, on peut prendre un sous espace vectoriel $K'_1 \subset K_1$ tel que :

$$K_1 = K'_1 \oplus \mathbb{K}x_{n+1} \text{ et que } b(x_1, K'_1) = 0.$$

En posant $L'_1 = Vect(x_2, \dots, x_n)$, on voit que L'_1 est un lagrangien dans $L'_1 \oplus K'_1$. On peut donc raisonner par récurrence et construire ainsi une base symplectique (x_1, \dots, x_{2n}) de V , dont les n premiers vecteurs forment une base de L_1 .

On construit de même une base symplectique (y_1, \dots, y_{2n}) telle que les n premiers vecteurs forment une base de L_2 .

L'unique application linéaire qui envoie (x_1, \dots, x_{2n}) sur (y_1, \dots, y_{2n}) est donc symplectique et l'image de L_1 est L_2 .

L'action est donc transitive et la formule annoncée en découle directement. \square

2. Il s'agit en fait de raffiner un petit peu la preuve du théorème 5

5.3.2 Petit exercice classique de dénombrement

Il s'agit maintenant d'évaluer le cardinal du groupe symplectique ainsi que du stabilisateur. On va se servir du lemme suivant d'algèbre linéaire.

Lemme 10

³ Si f est une forme symplectique sur un espace vectoriel V de dimension $2n$ sur \mathbb{F}_q , alors le nombre de paires (u, v) telles que $f(u, v) = b(u, v) = 1$ est $(q^{2n} - 1)q^{2n-1}$

Démonstration. Pour choisir une telle paire, il faut tout d'abord choisir un vecteur $u \in V - \{0\}$. Il y a $q^{2n} - 1$ possibilités. Ensuite, il s'agit de choisir, à u fixé, un vecteur v tel que $b(u, v) = 1$. On peut auparavant choisir un vecteur w tel que $b(u, w) \neq 0$ puis poser $v = \frac{w}{b(u, w)}$. Comme \mathbb{F}_q^* possède $q - 1$ éléments, on voit que

$$|\{v \in V / b(u, v) = 1\}| = \frac{|\{w \in V / b(u, w) \neq 0\}|}{q-1}$$

Ensuite, on considère la forme linéaire non nulle $\psi : x \mapsto b(u, x)$.

Son noyau est de dimension $2n - 1$ et il contient donc q^{2n-1} éléments. Ainsi,

$$|\{w \in V / b(u, w) \neq 0\}| = |V| - |\text{Ker}(\psi)| = q^{2n} - q^{2n-1} = q^{2n-1}(q - 1)$$

On peut donc conclure que $|\{v \in V / b(u, v) = 1\}| = q^{2n-1}$ et donc que le nombre de paires est $q^{2n-1}(q^{2n} - 1)$ □

Proposition 35 : Cardinal du groupe symplectique

$$|Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)| = q^{n^2} \prod_{i=1}^n (q^i - 1)(q^i + 1)$$

Démonstration. Etant donné une forme symplectique f sur un espace vectoriel V de dimension $2n$, d'après le théorème 5, il existe une base symplectique (v_1, \dots, v_{2n}) de V telle que

$$b(v_i, v_{i+n}) = 1 \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } b(v_i, v_j) = 0, \forall i, j \text{ tels que } |i - j| \neq n$$

alors,

$$\theta \in Sp(V) \iff (\theta v_i) \text{ est une base symplectique de } V.$$

Compter $|Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)|$ revient donc à compter le nombre de bases symplectiques (θv_i) , c'est-à-dire qui vérifient :

$$b(\theta v_i, \theta v_{i+n}) = 1 \forall i \in \{1, \dots, n\} \text{ et } b(\theta v_i, \theta v_j) = 0, \forall |i - j| \neq n$$

D'après le lemme 10, le nombre de paires $(\theta v_1, \theta v_{n+1})$ telles que $b(\theta v_1, \theta v_{n+1}) = 1$ est $(q^{2n} - 1)q^{2n-1}$. Il existe V_1 de dimension $2(n - 1)$ tel que $V = V_1 \oplus \langle \theta v_1, \theta v_{n+1} \rangle$. En considérant le noyau de la forme linéaire $x \mapsto b(x, v_1)$ qui est de dimension $2n - 1$, on voit que $b(V_1, v_1) = 0$. On est donc rammené à trouver une base symplectique de V_1 Une fois cette première paire choisie, le nombre de paires $(\theta v_2, \theta v_{n+2})$ telle que $b(\theta v_2, \theta v_{n+2}) = 1$ est égal à $q^{(2n-2)-1}(q^{2n-2} - 1)$. On continue de même jusqu'à la dernière paire $(\theta v_n, \theta_{2n})$ qui sont au nombre de $q(q^2 - 1)$. Ainsi,

3. A titre indicatif, cet énoncé est tiré de la partie exercice de l'ouvrage de Suzuki [8]

$$|Sp_{2n}(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=1}^n (q^{2i} - 1)q^{2i-1} = q^{n^2} \prod_{i=1}^n (q^i - 1)(q^i + 1)$$

□

Proposition 36 : Cardinal du stabilisateur

Soit V un espace symplectique de dimension $2n$ et soit $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ une base symplectique standard, c'est-à-dire telle que

$$b(u_i, u_j) = b(v_i, v_j) = 0 \text{ et } b(u_i, v_j) = \delta_{i,j}$$

On pose $X = \langle u_1, \dots, u_n \rangle$ et on a alors

$$|Stab(X)(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n+1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n (q^i - 1)$$

Démonstration. Afin de dénombrer le stabilisateur, nous allons chercher à caractériser ses éléments.

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in Stab(X)$ exprimée dans la base $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$.

Comme M stabilise X , on voit immédiatement que $C=0$. De plus, $M \in Sp_{2n}$ donc d'après la définition 35, on a

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^t \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

c'est-à-dire

$$\begin{pmatrix} 0 & A^t D \\ -D^t A & B^t D - D^t B \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ -I_n & 0 \end{pmatrix}$$

Ainsi, on voit que $D = (A^{-1})^t$ et que $B^t D = D^t B$ ce qui signifie que $D^t B$ est une matrice symétrique. Finalement, M est de la forme :

$$M = \begin{pmatrix} A & AS \\ 0 & (A^{-1})^t \end{pmatrix} \text{ où } S \text{ est une matrice symétrique } n \times n.$$

On note \mathcal{S}_n le groupe additif des matrices symétriques de taille $n \times n$ et on pose les morphismes suivants : $\Phi_1 : GL_n \rightarrow Sp_{2n}$ et $\Phi_2 : \mathcal{S}_n \rightarrow Sp_{2n}$ données par

$$\Phi_1(A) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^{-1})^t \end{pmatrix} \text{ et } \Phi_2(S) = \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix}$$

Ces morphismes sont choisis tels que :

$$\forall A \in GL_n, S \in Sp_{2n}, \Phi_1(A)\Phi_2(S) = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & (A^{-1})^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & S \\ 0 & I \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & AS \\ 0 & (A^{-1})^t \end{pmatrix}$$

Par ailleurs, il est immédiat de voir que $Im(\Phi_1) \cap Im(\Phi_2) = \{I\}$.

Ainsi, pour tout $M \in Sp_{2n}$, il existe A et S telles que $M = \Phi_1(A)\Phi_2(S)$ et cette décomposition est unique.

En effet, si il existe A' et S' telles que $M = \Phi_1(A')\Phi_2(S')$, alors $\Phi_1(A'A^{-1}) = \Phi_2(S - S')$. Comme $Im(\Phi_1) = Im(\phi_2) = \{I\}$, il en résulte que $A=A'$ et $S=S'$. Ainsi, cela se traduit en terme de cardinaux par :

$$|Stab(X)(\mathbb{F}_q)| = |\mathcal{S}_n(\mathbb{F}_q)| \times |GL_n(\mathbb{F}_q)| = q^{\frac{n(n+1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n (q^i - 1)$$

□

Théorème 7 : Cardinal de la Grassmannienne Lagrangienne

Le nombre de points dans $L_{n,2n}(\mathbb{F}_q)$ est donné par :

$$|L_{n,2n}(\mathbb{F}_q)| = \prod_{i=1}^n (1 + q^i)$$

Démonstration. Cela est une conséquence immédiate des propositions 34, 35 et 36 :

$$|L_{n,2n}(\mathbb{F}_q)| = \frac{|\mathcal{S}p_{2n}(\mathbb{F}_q)|}{|GL_n(\mathbb{F}_q)||\mathcal{S}_n(\mathbb{F}_q)|} = \frac{q^{n^2} \prod_{i=1}^n (q^i - 1)(q^i + 1)}{q^{\frac{n(n+1)}{2}} q^{\frac{n(n-1)}{2}} \prod_{i=1}^n (q^i - 1)} = \prod_{i=1}^n (1 + q^i)$$

□

Bibliographie

- [1] Ratnadha Kolhatkar : *Grassmann Varieties* \LaTeX , 2004
<http://www.math.mcgill.ca/goren/Students/KolhatkarThesis.pdf>
- [2] Daniel Perrin : *Cours d'algèbre*, Ellipses, 1996
- [3] Sous la direction de Aviva Szpirglas : *Mathématiques Algèbre L3*, Pearson, 2009
- [4] Michèle Audin : *Géométrie, chapitre VII Géométrie projective*, EDP Sciences, 2006
- [5] Jacques Lafontaine : *Introduction aux variétés différentielles*, EDP Sciences, 1996
- [6] Andrei Moroianu : *notes de cours disponibles sur internet*,
<http://www.math.polytechnique.fr/moroianu/553/cl.pdf>
- [7] Brendan Hasset : *Algebraic Geometry*, Cambridge, 2007
- [8] Philippe Caldero : *cours de M1 groupes et géométrie*, bientôt disponible en livre.
- [9] Clément de Seguins Pazzis : *Invitation aux formes quadratiques*, Calvage & Mounet, 2010
- [10] Michio Suzuki : *Group theory I*, Springer Verlag, 1982
- [11] Bourbaki : *Livre d'Algèbre, Chapitre 3*, Springer Verlag, 2006 (seconde édition)
- [12] Mneimné : *Eléments de géométrie : Action de groupes*, Cassini

Index

algèbre extérieure, 22
algèbre tensorielle, 21
atlas, 14

birapport, 12, 13

carte, 14

décomposable, 28
dénombrement, 2
dimension d'une variété, 38
droite projective, 16

espace projectif, 6
espace symplectique, 39, 40
exemple de $\text{Gr}(2,4)$, 27, 34

forme symplectique, 39

Grassmannienne, 1, 2, 26, 28, 30
Grassmannienne Lagrangienne, 41, 44, 48
groupe projectif, 1, 4, 9
groupe symétrique, 3, 4
groupe symplectique, 42, 46

homographie, 9, 13

isotrope, co-isotrope, 41

lagrangien, 41, 42

Plücker, coordonnées, 26
Plücker, relations, 33
Plücker, application, 26
produit tensoriel, 18

repère projectif, 10

stabilisateur, 2, 47

variété, 14, 28, 30, 43