Quadrature n° 125 (2022) 1-7

Perfectionnement de la règle des signes de Descartes

par Vincent YANNICK

Résumé.

Cet article présente un certain nombre de résultats, dûs en grande partie à Edmond Laguerre, et relatifs à la résolution des équations polynomiales. Ces résultats viennent compléter deux résultats classiques concernant le nombre de solutions d'une équation polynomiale : la règle des signes de Descartes ainsi que le théorème de Sturm. La première partie propose une démonstration purement analytique de la règle des signes de Descartes, ce qui permet une généralisation dans le cadre de la recherche des zéros d'une série entière. La deuxième partie vise ensuite à tirer partie de cette généralisation afin d'obtenir des résultats permettant de déterminer le nombre de racines d'un polynôme. La troisième partie présente enfin quelques exemples concrets d'utilisation de ces résultats.

Introduction

La règle des signes de Descartes permet d'obtenir facilement, et sans calcul, un majorant du nombre de racines réelles d'un polynôme. Pour un bon nombre de polynômes, ce majorant n'est toutefois pas optimal et reste strictement supérieur au nombre de racines. En 1829, Charles François Sturm a montré un résultat donnant le nombre exact des racines en faisant intervenir des divisions euclidiennes de polynômes [2]. Les calculs nécessaires à l'application de ce résultat étant néanmoins assez complexes, Edmond Laguerre a cherché à généraliser la règle des signes de Descartes et la rendre plus efficace. Cet article vise à présenter certains de ses résultats sur le sujet.

Remarque 1. *La majorité des résultats contenus dans cet article concerne le nombre de racines positives d'un polynôme. Néanmoins, il est facile d'en déduire le nombre de racines négatives d'un polynôme P en posant $Q(X) = P(-X)$ et en appliquant les résultats à Q. De même, lorsqu'un théorème porte sur les racines supérieures à 1 d'un polynôme P, il suffit de considérer le polynôme $Q(X) = X^n P(\frac{1}{X})$ pour obtenir des informations sur les racines de P inférieures à 1.*

Remarque 2. *En général, nous avons utilisé la notation $P(X)$ pour désigner l'expression d'un polynôme et $P(x)$ l'expression de la fonction polynomiale associée. De plus, « le nombre de racines d'un polynôme » désigne toujours le nombre de racines comptées avec leur multiplicité.*

I Règle des signes de Descartes et généralisation

I.1 Résultat préliminaire

Dans la suite de cet article, nous considérerons des équations qui ne seront pas toutes polynomiales. Pour cela, nous étendons la définition de la multiplicité d'une racine au cas des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ avant d'énoncer un corollaire du thèrome de Rolle utile par la suite.

Définition 3. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.*
On dit que x_0 est un zéro de f si $f(x_0) = 0$.
De plus, x_0 est dit de multiplicité $m \in \mathbb{N}$ si pour tout $0 \leqslant k \leqslant m-1$, $f^{(k)}(x_0) = 0$ et $f^{(m)}(x_0) \neq 0$. Si pour tout $k \in \mathbb{N}$, $f^{(k)}(x_0) = 0$, on dit que x_0 est de multi-

plicité infinie. Enfin, on note z_f le nombre (éventuellement infini) de racines de f comptées avec leur multiplicité.

Proposition 4 (Théorème de Rolle). *Soient $a < b$ deux réels et f une fonction à valeurs réelles, continue sur $[a;b]$ et dérivable sur $]a;b[$ telle que $f(a) = f(b)$. Alors, il existe un réel $c \in]a;b[$ tel que $f'(c) = 0$.*

Proposition 5 (Corollaire du théorème de Rolle). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f \in \mathscr{C}^\infty(I,\mathbb{R})$.*

Si $z_{f'}$ est fini alors z_f est fini et on a $z_f \leqslant z_{f'} + 1$.

Démonstration. Pour montrer que z_f est fini, il suffit de montrer que f admet un nombre fini de zéros et que chaque zéro est de multiplicité finie. D'une part, le fait que le nombre de zéros est fini résulte directement du théorème de Rolle car si f admettait une infinité de zéros, f' en admettrait également une infinité. D'autre part, si x_0 était un zéro de f de multiplicité infini, il serait également un zéro de f' de multiplicité infinie, ce qui est impossible car $z_{f'}$ est fini. Finalement, on a bien montré que z_f est fini.

On note $x_1,\dots x_p \in I$ les zéros de f et $\alpha_1,\dots,\alpha_p$ leur multiplicité respective. Par conséquent, pour tout $k \in [\![1;p]\!]$, x_k est un zéro de f' de multiplicité $\alpha_k - 1$. De plus, en appliquant le théorème de Rolle sur chaque intervalle $]x_k;x_{k+1}[$ (pour $1 \leqslant k \leqslant p-1$), on en déduit que f' admet $p-1$ zéros qui ne sont pas égaux à l'un des x_k. Finalement, cela signifie que le nombre de racines de f' compté avec leur mutiplicité est au moins égale à :

$$\sum_{k=0}^{p}(\alpha_k - 1) + (p-1) = \left(\sum_{k=0}^{p}\alpha_k\right) - p + p - 1 = z_f - 1.$$

On a ainsi prouvé que $z_{f'} \geqslant z_f - 1$ et donc que $z_f \leqslant z_{f'} + 1$. □

I.2 Règle des signes de Descartes

Définition 6. *Soit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$.*

On appelle « nombre de variations de P », et on note $V(P)$, le nombre de changements de signe dans la suite des coefficients a_0, a_1, …, a_n c'est-à-dire le cardinal de l'ensemble $\{(i;j), 0 \leqslant i < j \leqslant j, a_i a_j < 0 \text{ et } a_k = 0 \text{ pour tout } i < k < j\}$

Proposition 7 (Règle des signes de Descartes). *Si $P \in \mathbb{R}[X]$ et si r est le nombre de racines strictement positives de P, alors $r \leqslant V(P)$. De plus, $V(P) - r$ est un entier pair.*

Démonstration. On démontre par récurrence que la propriété $\mathscr{H}(m)$: « Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $V(P) = m$, $r \leqslant V(P)$ » est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Si $V(P) = 0$, alors la fonction polynomiale associée à P est monotone et on a $r = 0$. La propriété est donc vraie pour $m = 0$.

Supposons que la propriété $\mathscr{H}$ soit vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$. On considère alors un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ tel que $V(P) = m+1$. On note r son nombre de racines strictement positives.

Pour tout $\alpha > 0$, pour tout $x > 0$, $P(x) = 0 \iff x^{-\alpha}P(x) = 0$. Ainsi, r est égal au nombre de solutions strictement positives de l'équation $x^{-\alpha}P(x) = 0$. L'objectif est en fait d'appliquer la proposition 5 à la fonction $x \longmapsto x^{-\alpha}P(x)$ de dérivée $x \longmapsto x^{-\alpha-1}(xP'(x) - \alpha P(x))$. Or, les coefficients de l'équation $xP'(x) - \alpha P(x) = 0$ sont :

$$a_n(n-\alpha),\ a_{n-1}(n-1-\alpha), \dots,\ a_1(1-\alpha),\ a_0(0-\alpha).$$

Il suffit donc de choisir α tel que $k \leqslant \alpha < k+1$ où k est tel que a_k et a_{k+1} soient de signes contraires. La suite des coefficients précédents possède alors m variations de signe (une de moins que la suite a_0, $a_1,\dots,a_n$). Par hypothèse de récurrence, on sait que l'équation $xP'(x) - \alpha P(x) = 0$ admet au plus m solutions strictement positives (comptées avec multiplicités). D'après la proposition 5, cela signifie que l'équation $x^{-\alpha}P(x) = 0$ possède au plus $m+1$ solutions strictement positives (comptées avec multiplicité) et par conséquent que P possède au plus $m+1$ racines strictement positives (comptées avec multiplicité). Ainsi, $\mathscr{H}(m+1)$ est vraie.

Il reste désormais à montrer que $V(P) - r$ est pair.

On distingue les cas selon les signes de a_0 et a_n.

Supposons par exemple que $a_0 > 0$ et $a_n > 0$. Dans ce cas, $V(P)$ est pair. De plus, $P(0) > 0$ et $P(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$. Ainsi, il existe un réel $A > 0$ tel que pour tout $x \geqslant A$, $P(x) > 0$. Toutes les racines strictement positives de P sont donc contenues dans l'intervalle $]0;A[$. On les note $x_1,\dots,x_p$. Ainsi, P est de signe constant sur chaque intervalle $I_1 =]0;x_1[$, $I_2 =]x_1;x_2[,\dots,I_p =]x_{p-1};x_p[$ et $I_{p+1} =]x_p;A[$. De plus, pour $1 \leqslant k \leqslant p$, si x_k est de multiplicité paire, alors P est de même signe sur I_k et I_{k+1}. En revanche, si x_k est de multiplicité impaire, alors P est de signe opposé sur I_k et I_{k+1}. Finalement, comme $P(0) > 0$ et $P(A) > 0$, on en déduit qu'il existe un nombre pair de racines de multiplicité impaire, et qu'au total il y a donc un nombre pair de racines comptées avec leur multiplicité. Cela prouve bien que $V(P)$ et r ont même parité donc que $V(P) - r$ est pair.

On raisonne de même si a_n et a_0 sont de signe contraire : $V(P)$ et r seront impairs donc $V(P) - r$ sera pair. □

I.3 Généralisation au cas des séries

La preuve de la proposition 7 a en fait été proposée par Edmond Laguerre dans [5]. Elle présente l'avantage de ne mobiliser que des résultats d'analyse, principalement le théorème de Rolle. Cela signifie que la même preuve fonctionne dans le cas de la recherche des zéros d'une série entière [1]. De plus, il n'est pas utile de supposer que les exposants des termes de la fonction considérée soient nécessairement positifs. On obtient ainsi les résultats suivants :

Proposition 8. *Soit $F(x) = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ une série entière de rayon de convergence $R \in]0;+\infty]$ et telle que $\lim_{x\to R^-} F(x) = \pm\infty$. On note z_F le nombre de zéros de F dans $]0;R[$ et $V(F)$ le nombre de variations de signes de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Si $V(F) < +\infty$, alors $z_F \leqslant V(F)$. De plus, $V(F) - z_F$ est un entier pair.*

Démonstration. On démontre par récurrence que la propriété $\mathscr{H}(m)$: « Pour toute série entière $F(x) = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ de rayon de convergence $R \in]0;+\infty]$ et telle que $V(F) = m$, on a $z_F \leqslant V(F)$ » est vraie pour tout $m \in \mathbb{N}$.

Si $V(F) = 0$, alors F est monotone et on a $r = 0$. La propriété est donc vraie pour $m = 0$.

Supposons que la propriété $\mathscr{H}$ soit vraie pour un certain $m \in \mathbb{N}$. On considère alors une série entière $F(x) = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k$ de rayon de convergence $R \in]0;+\infty]$ et telle que $V(F) = m+1$.

Pour tout $\alpha > 0$, $F(x) = 0 \Longleftrightarrow x^{-\alpha}F(x) = 0$. Ainsi, z_F est égal au nombre de solutions strictement positives de l'équation $x^{-\alpha}F(x) = 0$. On va appliquer la 5 à la fonction $x \longmapsto x^{-\alpha}F(x)$ de dérivée $x \longmapsto x^{-\alpha-1}(xF'(x) - \alpha F(x))$. Or, les coefficients de l'équation $xF'(x) - \alpha F(x) = 0$ sont :

$$a_0(0-\alpha),\ a_1(1-\alpha), \ldots,\ a_k(k-\alpha),\ \ldots$$

Il suffit donc de choisir α tel que $k \leqslant \alpha < k+1$ où k est tel que a_k et a_{k+1} soient de signes contraires. La suite des coefficients précédents possède alors m variations de signe (une de moins que la suite $a_0, a_1, \ldots, a_n$). Par hypothèse de récurrence, on sait que l'équation $xF'(x) - \alpha F(x) = 0$ admet au plus m solutions (comptées avec multiplicité) dans l'intervalle $]0;R[$. D'après la 5, cela signifie que l'équation $x^{-\alpha}F(x) = 0$ possède au plus $m+1$ solutions (comptées avec multiplicité) et par conséquent que F possède au plus $m+1$ racines (comptées avec multiplicité) dans l'intervalle $]0;R[$. Ainsi, $\mathscr{H}(m+1)$ est vraie.

Il reste à montrer que $V(P) - z_F$ est pair. On note $x_1, x_2, \ldots x_p$ les zéros de F de l'intervalle $]0;R[$. D'après le principe des zéros isolés, on sait qu'il existe des entiers naturels $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ et une série entière G qui ne s'annule pas sur $]0;R[$ tels que, pour tout $x \in]0;R[$, $F(x) = \left(\prod_{k=1}^{p}(x-x_k)^{\alpha_k}\right) G(x)$. Par ailleurs, comme $V(F) < +\infty$, les coefficients a_k sont de signe constants à partir d'un certain rang k_0. On supposera par exemple que $a_{k_0} > 0$, le cas négatif se traitant de manière identique.

Supposons de plus que $a_0 > 0$. Il y a alors un nombre pair de changements de signes entre les coefficients a_0 et a_{k_0}, ce qui signifie que $V(F)$ est pair. De plus, $F(0) = a_0 = (-1)^{z_F} x_1 \ldots x_p G(0) > 0$. Or, sachant que $\lim_{x\to R^-} F(x) = +\infty$ (on a supposé que les coefficients sont tous positifs à partir d'un certain rang), on voit que G est strictement positive sur $]0;R[$ et donc que $G(0) \leqslant 0$. On en déduit alors que $(-1)^{z_F} > 0$ et donc que z_F est pair. Cela prouve que $V(F)$ et r ont même parité donc que $V(F) - z_F$ est pair.

Supposons que $a_0 < 0$. On prouve de même que $V(F)$ et z_F seront impairs donc que $V(F) - z_F$ sera pair. □

Proposition 9. *Soit $F(x) = \sum_{k\leqslant k_0} a_k x^k$ une série convergente sur $]R;+\infty[$ (avec $k_0 \in \mathbb{Z}$ et $R > 0$) et telle que $\lim_{x\to R^+} F(x) = \pm\infty$. On note z_F le nombre de zéros de F dans $]R;+\infty[$ et $V(F)$ le nombre de variations de signes de la suite $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.*

Si $V(F) < +\infty$, alors $z_F \leqslant V(F)$. De plus, $V(F) - z_F$ est un entier pair.

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition 8 à la série entière $G(x) = x^{k_0} F(\frac{1}{x})$ qui est convergente sur $]0;\frac{1}{R}[$ et telle que $\lim_{x\to \frac{1}{R}^+} G(x) = +\infty$. □

II Théorème de Laguerre et ses conséquences

Dans cette partie, nous allons déduire des propositions 8 et 9 un certain nombre de résultats donnant des majorants simples du nombre de racines d'une équation polynomiale.

1. Henri Poincaré a notamment souligné l'intérêt de la démonstration de Laguerre dans [7, p. 11] : « La démonstration classique de la règle des signes de Descartes est d'une grande simplicité ; Laguerre en a trouvé une plus simple encore. Ce n'eut été là qu'un avantage secondaire, mais la démonstration nouvelle s'applique non seulement aux polynômes entiers, mais encore aux séries infinies. » Toutes les autres démonstrations que nous connaissons utilisent au contraire des arguments « algébriques » qui ne se généralisent pas au cas des séries. Voir par exemple : [1, 3, pp. 378-425] et [4].

II.1 Théorème de Laguerre

Proposition 10. *Soit* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$. *Pour tout* $i \in [\![0;n]\!]$, *on pose* $f_i : x \longmapsto \sum_{k=0}^{i} a_{n-k} x^{i-k}$. *Le nombre de racines de* P *strictement supérieures à un réel* $c > 0$ *est inférieur ou égal au nombre de changements de signes de la suite* $f_0(c),\ f_1(c),\ \ldots,\ f_{n-1}(c),\ f_n(c)$.

Démonstration. Il suffit de remarquer que pour tout $x > c$, $P(x) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{P(x)}{x-c} = 0$. On remarque alors que la fraction rationnelle $\dfrac{P(x)}{x-c}$ se développe en série pour tout $x > c$ de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\frac{P(x)}{x-c} &= \frac{P(x)}{x(1-\frac{c}{x})} \\
&= \left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^{k-1}\right)\left(1 + \frac{c}{x} + \frac{c^2}{x^2} + \ldots\right) \\
&= a_n x^{n-1} + (a_n c + a_{n-1}) x^{n-2} + \ldots \\
&\quad + (a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \ldots + a_1 c + a_0) \times \frac{1}{x} + \ldots \\
&= f_0(c) x^{n-1} + f_1(c) x^{n-2} + \ldots \\
&\quad + f_n(c) \times \frac{1}{x} + c f_n(c) \times \frac{1}{x^2} + c^2 f_n(c) \times \frac{1}{x^3} + \ldots
\end{aligned}$$

Il est alors possible d'utiliser la proposition 9 car $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{P(x)}{x-c} = \pm\infty$. On en déduit ainsi que le nombre de racines de P strictement supérieures à b est majoré par le nombre de variations de signes des coefficients de la série précédente, c'est-à-dire par le nombre de variations de signes de la suite $f_0(c),\ f_1(c),\ \ldots,\ f_{n-1}(c),\ f_n(c)$. □

II.2 Corollaires du théorème de Laguerre

Proposition 11. *Soit* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$. *Le nombre de racines strictement supérieures à* 1 *est inférieur ou égal un nombre de variations de la suite suivante :*

$$\begin{aligned}
&a_n, \\
&a_n + a_{n-1}, \\
&a_n + a_{n-1} + a_{n-2} \\
&\vdots \\
&\sum_{k=0}^{n} a_k.
\end{aligned}$$

De plus, la différence entre le nombre de racines et le nombre de variations de signes de la suite est un entier pair.

Démonstration. Il s'agit d'une application immédiate du théorème de Laguerre avec $c = 1$. □

Proposition 12 ([6]). *Soit* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$.

On note

$$N = \max\{|a_k|,\ a_k < 0\} \text{ et } k_0 = \max\{k,\ a_k < 0\}.$$

Le nombre de racines strictement positives de P *est inférieur ou égal à*

$$1 + \frac{N}{a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{k_0+2} + a_{k_0+1}}.$$

Démonstration. La preuve consiste à appliquer le théorème de Laguerre avec $c = 1 + \frac{N}{a_n + a_{n-1} + \ldots + a_{k_0+1}}$ et à montrer que la suite $f_0(c),\ f_1(c),\ \ldots,\ f_{n-1}(c),\ f_n(c)$ définie par le théorème de Laguerre ne possède alors aucune variation de signe. □

Proposition 13 ([6]). *Avec les mêmes hypothèses que la proposition 12, et en posant*

$$N' = \max\{|a_k|,\ a_k < 0 \text{ et } |a_k| \neq N\},$$

le nombre de racines strictement positives de P *est inférieur ou égal à*

$$1 + \frac{N + N'}{2a_n + 2a_{n-1} + \ldots + 2a_{k_0+2} + a_{k_0+1}}.$$

Démonstration. On pose la fonction $\phi : x \longmapsto (x+1)P(x)$.

Pour tout x, $\phi(x) = a_n x^{n+1} + (a_n + a_{n-1}) x^n + \ldots + (a_1 + a_0) x + a_0$. Le plus grand coefficient négatif de ϕ (en valeur absolue) est toujours inférieur à $N + N'$, d'où le résultat en appliquant la proposition 12 à ϕ. □

II.3 Généralisation du théorème de Laguerre

Pour prouver le théorème de Laguerre, l'idée principale était d'utiliser l'équivalence $P(x) = 0 \Longleftrightarrow \dfrac{P(x)}{x-c} = 0$ et d'appliquer ensuite la règle de Descartes généralisée au cas des séries. On peut en fait procéder de même en appliquant la règle de Descartes au développement en série de la fraction rationnelle $\dfrac{P(x)}{(x-b)^p}$.

Pour $b = 1$, on obtient le résultat suivant :

Proposition 14. *Soit* $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$. *On construit le tableau suivant, où pour tout* $p \in \mathbb{N}^*$, $b_n^p = a_n$ *et chaque coefficient* b_k^p *est la somme du coefficient au dessus de lui et du coefficient à sa gauche :*

a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\dots$	$\dots$	a_0	0	0	0	
b_n^1	b_{n-1}^1	b_{n-2}^1	$\dots$	$\dots$	b_0^1	b_{-1}^1	b_{-2}^1	b_{-3}^1	$\dots$
b_n^2	b_{n-1}^2	b_{n-2}^2	$\dots$	$\dots$	b_0^2	b_{-1}^2	b_{-2}^2	b_{-3}^2	$\dots$
b_n^3	b_{n-1}^3	b_{n-2}^3	$\dots$	$\dots$	b_0^3	b_{-1}^3	b_{-2}^3	b_{-3}^3	$\dots$

Alors, pour chaque $p \in \mathbb{N}^*$, le nombre de racines de P strictement supérieures à 1 est inférieur ou égal au nombre de variations de la suite $(b_k^p)_{k \leqslant n}$. De plus, la différence entre le nombre de racines et le nombre de variations de signes de la suite est un entier pair.

Démonstration. Il est facile de montrer par récurrence que le tableau ci-dessus donne exactement, à la ligne p, les coefficients du développement de $\dfrac{P(x)}{(x-1)^p}$. Il suffit donc d'appliquer la règle des signes de Descartes généralisée pour obtenir le résultat souhaité. □

Remarque 15. *Il est possible de démontrer que si $p \leqslant p'$, alors le nombre de variations de signe de la suite $(b_k^p)_{k \leqslant n}$ est inférieur ou égal au nombre de variations de la suite $(b_k^{p'})_{k \leqslant n}$. Autrement dit, le résultat obtenu à la ligne p' sera au moins aussi bon que le résultat obtenu à la ligne p [5, p. 119]. Il se peut cependant que le nombre de variations de chacune des suites $(b_k^p)_{k \leqslant n}$ soit strictement supérieur au nombre de racines. Ainsi, la proposition 14 ne donne généralement pas le nombre exact de racines mais uniquement des majorants de ce nombre. L'idée de Laguerre va en fait consister à faire tendre p vers l'infini pour obtenir le nombre exact de racines de P. Plus exactement, en faisant tendre p vers l'infini, l'expression $\dfrac{P(x)}{(1-\frac{zx}{p})^p}$ (où z est un réel fixé) converge vers $P(x)e^{zx}$. Cela va permettre à Laguerre de démontrer le résultat suivant.*

Proposition 16. *Si $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \in \mathbb{R}[X]$ (avec $a_0 \neq 0$), alors il existe $z > 0$ (suffisamment grand) tel que le nombre de variations de signe des coefficients du développement en série de $P(x)e^{zx}$ est exactement égal au nombre de racines strictement positives de P.*

Remarque 17. *Supposer $a_0 \neq 0$ n'est pas contraignant étant donné que si $a_0 = 0$, on peut toujours factoriser $P(X)$ par une puissance de X pour se ramener à un cas où $a_0 = 0$.*

Démonstration. On note V le nombre de variations de signe des coefficients du développement en série de $P(x)e^{zx}$ et r le nombre de racines strictement positives de P. D'après la règle des signes de Descartes généralisée, on sait que $r \leqslant V$. On va maintenant procéder en 3 étapes afin de prouver que $V \leqslant r$.

Étape 1 : Calcul des coefficients du développement et redéfinition du problème.

Soit $z > 0$. D'après le produit de Cauchy, on a : $e^{zx}P(x) = \sum_{k \geqslant 0} A_k \dfrac{x^k}{k!}$ avec :

$$\begin{aligned} A_0 &= a_0, \\ A_1 &= a_0 z + a_1, \\ &\vdots \\ A_i &= a_0 z^i + i a_1 z^{i-1} + i(i-1) a_2 z^{i-2} + \dots \end{aligned}$$

En multipliant A_i par z^{n-i}, on voit que A_i a le même signe que l'expression

$$a_0 z^n + i a_1 z^{n-1} + i(i-1) a_2 z^{n-2} + \dots$$

On définit, pour tout $z > 0$ le polynôme

$$\begin{aligned} F_z(x) = {} & a_0 z^n + a_1 z^{n-1} x + a_2 z^{n-2} x(x-1) + \dots \\ & + a_n x(x-1)\dots(x-n+1). \end{aligned}$$

Ainsi V est égal au nombre de variations de signe de la suite

$$F_z(0),\ F_z(1),\ F_z(2),\ \dots$$

De plus, en posant $\Phi_z(X) = \dfrac{F(zX)}{z^n}$, on a :

$$\begin{aligned} \Phi(X) = {} & a_0 + a_1 X + a_2 X\left(X - \frac{1}{z}\right) \\ & + \dots + a_n X\left(X - \frac{1}{z}\right)\dots\left(X - (n-1)\frac{1}{z}\right) \end{aligned}$$

Il en résulte que V est aussi égal au nombre de variations de la suite

$$\Phi(0),\ \Phi\left(\frac{1}{z}\right),\ \Phi\left(\frac{2}{z}\right),\ \dots$$

Si on note r' le nombre de racines strictement positives de Φ_z, on a $V \leqslant r'$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires. Comme on sait par ailleurs que $r \leqslant V$, on en déduit que $r \leqslant V \leqslant r'$. L'objectif des étapes suivantes est donc de montrer que $r' \leqslant r$ afin d'en déduire que $V = r$.

Étape 2 : Cas où toutes les racines de P sont réelles et strictement positives.

Dans ce cas, on a $r = n$ et l'inégalité $r \leqslant V \leqslant r'$ est en fait une égalité car Φ_z est un polynôme de degré n. On a donc bien $V = r$.

Étape 3 : Cas général.

Le discriminant de Φ_z est une fonction polynomiale en $\frac{1}{z}$. Ainsi, il existe $z_1 > 0$ tel que pour tout $z \geqslant z_1$, le polynôme Φ_z n'admet que des racines simples (il suffit de choisir z_1 tel que $\frac{1}{z_1}$ est inférieur à la plus petite racine strictement positive de Φ_z). De plus, comme

$a_0 \neq 0$, on sait que $\Phi_z(0) \neq 0$. Il en résulte que le nombre de racines strictement positives de Φ_z est une fonction croissante de z sur $[z_1;+\infty[$. En effet, en utilisant la continuité des racines en fonction des coefficients, on voit que si z augmente, aucune racine positive de Φ_z ne peut « devenir » négative. De même, elles ne peuvent pas « devenir » non réelles car l'on obtiendrait alors une racine double pour un certain $z > z_1$. Il reste enfin à constater que, pour tout $x > 0$, $\Phi_z(x) \xrightarrow[z\to+\infty]{} P(x)$. Ainsi, par continuité des racines en fonction des coefficients, il en résulte que $r' \leqslant r$ puis, par suite, que $V = r$. $\square$

Remarque 18. *Le théorème précédent permet ainsi de calculer le nombre exact de racines réelles d'un polynôme. Dans la démonstration, nous avons vu qu'il faut néanmoins calculer le discriminant du polynôme Φ_z et déterminer une borne inférieure des racines strictement positives de ce discriminant. Laguerre lui-même reconnait que cela n'est pas réellement utile en pratique :*

> *« De là résulte une méthode entièrement différente de celle de Lagrange et de celle de Sturm pour déterminer exactement le nombre de racines positives d'une équation. [...] Bien que ce procédé ne soit guère pratique, j'ai cru devoir le mentionner, eu égard au petit nombre des méthodes qui permettent de déterminer le nombre exact des racines d'une équations [...]. » [5, p. 122]*

III Déterminer le nombre de racines en pratique

Dans cette partie, nous donnons trois exemples de polynômes dont nous déterminons le nombre de racines. Pour le premier polynôme, la règle des signes de Descartes sera suffisante. Pour les deux autres, il sera néanmoins nécessaire d'utiliser les règles plus raffinées de Laguerre. Dans cette partie, on notera r_I le nombre de racines de P contenues dans I (où I est un intervalle).

III.1 Racines du polynôme $P(X) = X^6 + 3X^4 - X^3 - 5X - 1$

- Les coefficients de P sont : 1; 0; 3; -1; -5; -1. On a donc $V(P) = 1$. Ainsi, d'après la règle des signes de Descartes (proposition 7), $0 \leqslant r_{\mathbb{R}^+} \leqslant 1$ et $r_{\mathbb{R}^+} - 1$ est pair. Par conséquent, $r_{\mathbb{R}^+} = 1$. Le polynôme admet exactement une racine positive.
- On pose $Q(X) = P(-X) = X^6 + 3X^4 - X^3 + 5X - 1$. Les coefficients de Q sont 1; 0; 3; 1; 5; -1 et $V(Q) = 2$. D'après la règle des signes de Descartes, on a donc $r_{\mathbb{R}^-} = 0$ ou $r_{\mathbb{R}^-} = 2$. De plus, comme $P(0) = -1$ et $P(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} +\infty$, on sait d'après le théorème des valeurs intermédiaires que P admet au moins une racine négative. Finalement, on en déduit que $r_{\mathbb{R}^-} = 2$.
- Au total, $r_{\mathbb{R}^+} = 1$ et $r_{\mathbb{R}^-} = 2$ donc P admet exactement trois racines réelles.

III.2 Racines du polynôme $P(X) = X^5 - 3X^3 + X^2 - 8X - 10$

- Les coefficients de P sont : 1; 0; -3; 1; -8 -10. On a $V(P) = 3$. Néanmoins, on peut voir que $r_{\mathbb{R}^+} \neq 3$. En effet, d'après la proposition 11, $r_{]1;+\infty[}$ est inférieur au nombre de variations de signes de la suite suivante :

$$1;\ -2;\ -1;\ -9;\ -19.$$

  Ainsi, $r_{]1;+\infty[} = 1$. De plus, en posant $Q(X) = X^5 P(\frac{1}{X}) = -10X^5 - 8X^4 + X^3 - 3X^2 + 1$ et en appliquant la proposition 11 à Q, on voit que $r_{]0;1[}$ est inférieur au nombre de variations de la suite :

$$-10;\ -18;\ -17;\ -14;\ -13.$$

  On a donc $r_{]0;1[} = 0$ et $r_{\mathbb{R}^+} = r_{]0;1[} + r_{]1;+\infty[} = 1$.
- On pose $Q(X) = P(-X) = -X^5 + 3X^3 + X^2 + 8X - 10$. $V(Q) = 2$ donc $r_{\mathbb{R}^-} = 0$ ou $r_{\mathbb{R}^-} = 2$. Par ailleurs, comme on sait que $P(0) < 0$, que $P(-1) = 1 > 0$ et que $P(x) \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty$, on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires que $r_{\mathbb{R}^-} > 0$. Finalement, $r_{\mathbb{R}^-} = 2$.
- Au total, $r_{\mathbb{R}^+} = 1$ et $r_{\mathbb{R}^-} = 2$ donc P admet exactement trois racines réelles.

III.3 Racines du polynôme $P(X) = X^4 - 3X^3 + 9x - 9$

- Les coefficients de P sont : 1; -3; 0; 9; -9. On a $V(P) = 4$ donc $r_{\mathbb{R}^+} \neq 3$. On va voir qu'en fait $r_{\mathbb{R}^+} = 1$. Pour cela, on construit le tableau de la proposition 14 :

1	-3	0	9	-9	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-2	-2	7	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	-2	...
1	-1	-3	4	2	0	-2	-4	-6	-8	-10	-12	...
1	0	-3	1	3	3	1	-3	-9	-17	-27	-39	...
1	1	-2	-1	2	5	6	3	-6	-23	-50	-89	...
1	2	0	-1	1	6	12	15	9	-14	-64	-153	...
1	3	3	2	3	9	21	36	45	31	-33	-186	...

Ainsi, on voit que les coefficients de la dernière ligne du tableau ne présentent qu'une seule variation de signes et on en déduit que $r_{]1;+\infty[} = 1$.

Par ailleurs, en posant $Q(X) = X^4 P(\frac{1}{X}) = -9X^4 + 9X^3 - 3X + 1$ et en appliquant la proposition 11 à Q, on sait que $r_{]0;1[} = 0$. Finalement, cela signifie que $r_{\mathbb{R}^+} = 1$

- On pose $Q(X) = P(-X) = X^4 + 3X^3 - 9X - 9$. Une application directe de la règle des signes de Descartes montre que Q possède exactement une racine positive, c'est à dire que $r_{\mathbb{R}^-} = 1$
- Au total, $r_{\mathbb{R}^+} = 1$ et $r_{\mathbb{R}^-} = 1$ donc P admet exactement deux racines réelles.

Références

[1] Augustin-Louis Cauchy, *Cours d'analyse de l'École royale polytechnique*. De l'imprimerie Royale, 1821.

[2] Patrick David and Julien Sautier, « Méthode de Sturm pour déterminer le nombre de racines réelles d'un polynôme de degré 4 ». *Quadrature*, 110, 2018.

[3] Abbé De Gua, « Mémoire qui contient une démonstration d'algèbre cherchée depuis longtemps par les plus fameux algébristes ; sur la façon de rechercher le nombre de racines réelles ou imaginaires ». *Mémoires de l'Académie royale des Sciences*, 1744.

[4] C. Jaccottet, « Une démonstration du théorème de Descartes ». *L'enseignement mathématiques*, 11 : 118–120, 1909.

[5] Edmond Laguerre, « Sur la théorie des équations numériques ». *Journal de mathématiques pures et appliquées*, (série 3, t. 4):99–146, 1883.

[6] Gohiere de Longchamps, « Théorème d'algèbre ». *Nouvelles annales de mathématiques : journal des candidats aux ecoles polytechnique et normale*, (série 2, t. 19):71–74, 1880.

[7] Henri Poincaré, *Notice sur le Laguerre*. Gauthier-Villars, Paris, 1887.