Philosophia Scientiæ
Travaux d'histoire et de philosophie des sciences

24-1 | 2020
Les mathématiques dans les écoles militaires (XVIIIe-XIXe siècles)

Ce que nous apprend une étude autour des équations numériques à propos de l'École polytechnique au XIXe siècle

What a Study of Numerical Equations Tells us about the École Polytechnique in the 19th Century

Yannick Vincent

Édition électronique
URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/2170
DOI : 10.4000/philosophiascientiae.2170
ISSN : 1775-4283

Éditeur
Éditions Kimé

Édition imprimée
Date de publication : 1 mars 2020
Pagination : 59-74
ISSN : 1281-2463

Référence électronique
Yannick Vincent, « Ce que nous apprend une étude autour des équations numériques à propos de l'École polytechnique au XIXe siècle », *Philosophia Scientiæ* [En ligne], 24-1 | 2020, mis en ligne le 01 janvier 2021, consulté le 31 mars 2021. URL : http://journals.openedition.org/philosophiascientiae/2170 ; DOI : https://doi.org/10.4000/philosophiascientiae.2170

Ce que nous apprend une étude autour des équations numériques à propos de l'École polytechnique au XIX^{e} siècle

Yannick Vincent
LinX, École polytechnique, IP Paris, Palaiseau (France)

Résumé : Dans cet article, je discuterai de l'idée selon laquelle l'École polytechnique au XIX^{e} siècle ne permettait pas aux acteurs (les élèves et les enseignants) de réaliser des travaux mathématiques originaux. En fait, plusieurs historien·ne·s pensent que les programmes d'examens empêchaient les élèves et les enseignants de prendre des initiatives. J'essayerai de nuancer cette idée, en prenant en compte plusieurs exemples liés à l'enseignement des équations numériques au cours du XIX^{e} siècle. Plus précisément, je présente dans cet article trois théorèmes attribués à trois enseignants de l'École polytechnique et qui ont circulé parmi les élèves de l'École et parmi des milieux d'enseignement. Ces exemples sont intéressants car ils donnent des informations à propos de l'École polytechnique et à propos de l'enseignement et de l'apprentissage qui s'y pratiquaient. Ils permettent aussi de mieux connaître la façon dont la recherche de résultats mathématiques nouveaux pouvait, dans ce contexte, être liée à des activités pédagogiques et je vais expliquer comment ce lien a de nombreuses conséquences sur l'activité d'un enseignant comme Edmond Laguerre par exemple.

Abstract: This article discusses how during the 19th century, the École Polytechnique failed to encourage its students and teachers to publish original works in mathematics. Some historians have argued that the system of review in place at the academy systematically discouraged these actors from taking the initiative of diffusing new knowledge. My aim in this paper is to qualify this idea by considering several examples of how numerical equations were taught in the nineteenth century. More specifically, I examine three theorems credited to three different instructors at the Ecole Polytechnique, which were then circulated among students and other teachers. The interest in considering these theorems is that they provide unique insight into the teaching methods used at the academy during this period. Additionally, they allow us to better

Philosophia Scientiæ, 24(1), 2020, 59–74.

understand the potential role of mathematical research in education, and similarly, how linking the two has impacted the work of mathematicians such as Edmond Laguerre.

1 Introduction

Un certain nombre d'historien·ne·s des mathématiques ont déjà insisté sur l'importance de considérer l'histoire de l'enseignement. Bruno Belhoste défend ainsi le point de vue que :

> la mise en commun du savoir mathématique, c'est-à-dire sa socialisation au sein de communautés de spécialistes et de communautés d'utilisateurs, qu'elles soient savantes ou de métier, voire même dans l'ensemble du corps social, constitue un aspect essentiel de l'activité mathématique, partie intégrante de l'activité d'invention. [Belhoste 1998, 289]

C'est d'ailleurs sous ce prisme qu'il analyse l'histoire de l'École polytechnique et qu'il oppose, d'un côté, la dynamique que connaît l'École après sa création en 1794 et, de l'autre, le fonctionnement plus routinier qui se met en place par la suite. Il écrit plus précisément :

> C'est seulement dans les premières années après la fondation [de l'École] qu'enseignement et recherche sont associés organiquement. Lagrange et Monge donnent des leçons aux élèves les plus avancés où ils présentent des travaux et résultats inédits, le premier sur la théorie des fonctions analytiques, le second sur la géométrie infinitésimale et les élèves eux-mêmes sont invités à entreprendre des recherches originales. Plus tard, en revanche, la recherche est bannie de l'École, les leçons devant suivre strictement un programme défini à l'avance. [...] En fait, l'École polytechnique cesse d'être un lieu de recherche entre 1805 et 1830. [Belhoste 1998, 295]

D'autres historien·ne·s portent d'ailleurs un jugement similaire, comme par exemple Hélène Gispert :

> La place des mathématiques y est ambiguë. Science reine à l'École polytechnique, les mathématiques sont victimes de cette place de choix dans un enseignement français coupé de la recherche, qui prône avant tout le côté utile, pratique et concret de la formation des futurs ingénieurs et se méfie donc des développements théoriques abstraits. [Gispert 1996, 403]

Dans cet article, je voudrais cependant nuancer cette idée. En effet, l'hypothèse que permet de formuler l'étude autour des équations numériques que je vais présenter ci-après est que le lien entre enseignement et recherche continue d'exister tant bien que mal dans le cadre de la formation polytechnicienne au XIXᵉ siècle. Sur le seul sujet des équations numériques, il existe ainsi trois résultats attribués à des enseignants de l'École polytechnique. Il s'agit de ceux de Sturm, d'Hermite et de Laguerre[1]. Je montrerai que ces résultats circulent dans les milieux d'enseignement, que ce soit auprès des élèves de l'École polytechnique ou bien au sein des classes préparatoires, ce qui suggère que l'enseignement à l'École polytechnique n'est peut-être pas si coupé que cela de la recherche de nouveaux résultats et qu'il permet certaines prises d'initiatives de la part des acteurs. On trouve par exemple un bon nombre d'articles publiés dans les *Nouvelles Annales* au sujet de ces trois résultats. Ce journal est en fait à destination d'un public que l'on qualifie généralement d'intermédiaire, c'est-à-dire, d'après [Nabonnand & Rollet 2013], un public composé prioritairement d'élèves et d'enseignants de classes préparatoires.

Enfin, je dirai quelques mots à propos des équations numériques afin de situer le sujet de mon étude. Au XIXᵉ siècle, la résolution des équations numériques constitue l'une des parties importantes de l'algèbre avec la résolution des équations algébriques. Elle consiste à déterminer une valeur approchée des racines d'une équation polynomiale ou parfois, ce qui est un problème lié, à déterminer le nombre de racines contenues dans un intervalle donné, lorsque la résolution algébrique consiste plutôt, lorsque cela est possible, à en déterminer une valeur exacte[2]. La règle des signes de Descartes est sans doute le résultat le plus classique concernant les équations numériques au XIXᵉ siècle. Elle est au départ enseignée dans les cours de l'École polytechnique avant de passer, en 1821, dans le programme du concours d'admission[3]. Il existe également d'autres règles, telles que celle attribuée à Budan de Boislaurent et à Fourier[4]. D'après Borowczyk, celle-ci a d'ailleurs été exposée dans le cours magistral de Joseph Fourier à l'École polytechnique [Borowczyk 1991]. Le sujet des équations numériques apparaît en cela comme un témoin du fait que les

1. Le théorème de Sturm est bien connu des historien·ne·s des mathématiques. Il a fait l'objet d'importants travaux, en particulier [Sinaceur 1991]. Dans cet article, il s'agit simplement d'en tirer quelques éléments pertinents pour ce qui concerne la problématique que je viens de présenter. Les résultats d'Hermite et de Laguerre sur les équations numériques semblent en revanche beaucoup moins cités dans l'historiographie des mathématiques.

2. Cette division entre résolution numérique et résolution algébrique est par exemple présente dans les programmes du concours d'admission de l'École polytechnique et l'introduction de [Serret 1849] reprend cette même distinction.

3. Cette décision est prise par le conseil de perfectionnement de l'École polytechnique. Voir Archives de l'École polytechnique, III1, conseil de perfectionnement du 8 novembre 1821.

4. Concernant cette règle, ainsi que d'autres résultats relatifs aux équations numériques, on pourra consulter [Chabert 2015] qui constitue une bonne synthèse de l'histoire du sujet entre 1750 et 1850.

cours magistraux de la fin du XVIIIe siècle et du début du XIXe siècle pouvaient contenir des résultats novateurs. On peut enfin citer la méthode de Newton ou la méthode de Lagrange consistant à former l'équation aux carrés des différences des racines comme étant, là aussi, des règles assez fréquemment utilisées à l'époque. C'est dans ce contexte, où un petit nombre de règles classiques sont connues des polytechniciens, du fait qu'elles sont au programme d'examen, que Charles François Strum va découvrir un nouveau théorème, possédant l'avantage de donner le nombre exact de racines d'une équation là où les autres règles ne fournissaient qu'une majoration.

> **Règle des signes de Descartes et son lemme (attribué à Segner) dans [Bertrand 1870, chap. 2]**
> Règle des signes de Descartes :
> « Une équation algébrique $\phi(x) = 0$ dont le premier membre est une fonction rationnelle et entière[5] de x, ne peut avoir plus de racines positives qu'il n'y a de variations de signes dans les coefficients de $\phi(x)$. »
> Lemme de Segner :
> « Si l'on multiplie par $(x - \alpha)$ un polynôme rationnel et entier, ordonné suivant les puissances décroissantes de x, les coefficients du produit, considérés à partir du premier, présentent au moins une variation de signe de plus que ceux du multiplicande. »

2 Le théorème de Sturm

2.1 L'énoncé du théorème

Le 23 mai 1829, Charles François Sturm communique à l'Académie royale des sciences de Paris le célèbre théorème qui portera son nom à propos du nombre de racines d'une équation polynomiale[6]. En juin de la même année, il publie son résultat, sans démonstration, dans le *Bulletin de Férussac*, ce qui lui vaut une popularité immédiate [Sturm 1829]. Il faudra néanmoins attendre six ans pour qu'il publie en son nom propre la démonstration dans [Sturm 1835].

5. Une fonction rationnelle et entière est ce que nous appelons aujourd'hui une fonction polynomiale à coefficients rationnels.

6. L'histoire de ce résultat et de sa postérité a été largement étudiée par [Sinaceur 1991]. Un bon nombre des informations de cette partie sont donc déjà contenues dans cet ouvrage.

> **Énoncé moderne du théorème de Sturm**
> **[Francinou, Gianella *et al.* 2007, 238]**
> « Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On pose $V_0 = P$, $V_1 = P'$, puis, aussi longtemps que c'est possible,
>
> $$V_{i-1} = A_i V_i - V_{i+1},$$
>
> avec $\deg(V_{i+1}) < \deg(V_i)$ et $A_i \in \mathbb{R}[X]$.
> Pour x réel, on note $N(x)$ le nombre de changements de signes (stricts) de la suite $V_0(x), \ldots, V_r(x)$, lorsque $V_{r+1} = 0$. Autrement dit,
>
> $$N(x) = \text{Card}\ \{(i,j) \in [\![0,p]\!]^2 /\ V_i(x)V_j(x) < 0 \text{ et } V_k(x) = 0 \text{ si } i < k < j\}.$$
>
> Soit $a < b$. On suppose $P(a)P(b) \neq 0$. Le nombre de racines distinctes de P dans $[a,b]$ est alors égal à $N(a) - N(b)$. »

2.2 Le théorème de Sturm dans l'enseignement polytechnicien

En fait, si Sturm n'a pas publié personnellement la démonstration de son résultat avant 1835, d'autres mathématiciens l'ont néanmoins fait à sa place. En 1832, Mayer et Choquet publient ainsi une démonstration avec l'autorisation de Sturm [Choquet & Mayer 1832, xiii]. En 1833, Lefébure de Fourcy, examinateur d'admission à l'École polytechnique et ancien répétiteur publie également une démonstration du théorème de Sturm dans la première édition de [Lefébure de Fourcy 1833]. Il explique d'ailleurs dans la préface que même si l'ouvrage est destiné aux élèves préparant le concours d'admission de l'École polytechnique, il a tout de même décidé de développer certains théorèmes hors programmes comme celui de Sturm. Il ajoute :

> Par cette découverte, l'analyse des équations a reçu de M. Sturm un perfectionnement que n'avaient pu lui donner les efforts des plus grands géomètres, et il y a lieu de croire que, sur ce point, une heureuse réforme aura été introduite dans l'enseignement d'ici à quelques années. [Lefébure de Fourcy 1833, VI]

Deux ans plus tard, lors de la parution de [Lefébure de Fourcy 1835], la situation semble avoir bien évolué. Lefébure de Fourcy fait le constat que non seulement « le beau théorème de Sturm [...] est connu de tous les savans », mais qu'il est également « adopté par tous les professeurs dans l'enseignement de nos collèges » [Lefébure de Fourcy 1835, I]. On retrouvera ce résultat dans la plupart des traités d'algèbre à destination des candidats au concours d'admission de l'École polytechnique et on sait d'après [Laffite 1894, 467, 481] que, dès 1837, l'examinateur d'admission Auguste Comte pose des questions relatives au théorème de Sturm, exigeant des candidats qu'ils connaissent l'énoncé du théorème et sa démonstration.

Ainsi, la rapidité avec laquelle les milieux mathématiques s'emparent du théorème de Sturm est assez exceptionnelle. Du point de vue des travaux de Sturm, cela illustre sans doute toute l'importance de ce nouveau théorème, tant par la portée de la question à laquelle il répond, que par la simplicité de la réponse qu'il apporte. Du point de vue des milieux d'enseignement, et en particulier de l'École polytechnique, cela dénote d'un grand intérêt porté pour des questions relevant d'une activité de type « recherche ». Les traités d'enseignement jouent en effet un rôle dans le dévoilement de la démonstration du théorème de Sturm bien que leur but initial soit de servir de manuel aux élèves des classes préparatoires[7]. En pratique, le théorème passe alors très rapidement dans les sujets de concours de l'École polytechnique, bien qu'il faille attendre 1866 pour que l'institution l'inscrive officiellement dans les programmes du concours[8]. En quelques années, il devient l'un des classiques du concours d'admission.

Il y a donc là une forme particulière de lien entre enseignement et recherche mathématique, différente de celle consistant à exposer un de ses résultats personnels dans un cours magistral. Mais indéniablement, l'exemple du théorème de Sturm prouve qu'un tel lien entre enseignement et recherche peut bel et bien exister dans le système polytechnicien des années 1830.

3 La règle d'Hermite

3.1 Le contexte d'une découverte

La règle que le jeune élève de classes préparatoires Charles Hermite découvre en 1842 au sujet des équations numériques ne connaît clairement pas le même écho que le théorème de Sturm. Il s'agit d'une règle particulière concernant les équations dont certains des coefficients sont en progression arithmétique et il est peu de dire qu'elle n'a pas marqué l'histoire de l'algèbre, à l'inverse d'autres de ses travaux de jeunesse comme celui sur les équations du cinquième degré[9]. Toutefois, sachant qu'il s'agit d'une production d'élève de classes préparatoires, futur polytechnicien et futur enseignant de l'École polytechnique, une étude de cas autour de la règle d'Hermite apparaissait particulièrement intéressante ici.

En fait, Charles Hermite est élève du collège Louis-le-Grand et suit les cours du professeur Richard lorsqu'il participe au Grand concours de 1842. Chaque année, ce concours comporte une question pour les élèves des

7. Dans les tables des matières, les notions hors des limites du programme du concours d'admission de l'École polytechnique sont marquées d'un astérisque. Elles sont bien entendu largement minoritaires.

8. Voir Archives de l'École polytechnique III2, Conseil d'instruction du 22 novembre 1866.

9. Pour une étude des travaux d'Hermite sur ce sujet, voir [Goldstein 2011].

classes de mathématiques élémentaires et une pour les élèves des classes de mathématiques spéciales. Pour l'année 1842, le sujet de mathématiques spéciales, celui sur lequel doit travailler Hermite, est simplement « la règle des signes de Descartes ». Le créateur des *Nouvelles Annales*, Olry Terquem, se plaint d'ailleurs de la banalité du sujet en expliquant que « la destination du Grand concours est de faire sortir de la foule, de mettre en évidence les esprits brillants, les intelligences privilégiées » [Terquem 1842]. Pourtant, c'est bien dans le cadre de ce concours qu'Hermite « va consigner une observation ingénieuse, probablement la plus saillante du concours » [Terquem 1843a, 376], même s'il n'est pas primé pour cela.

3.2 L'énoncé du résultat et sa démonstration

> **Énoncé de la règle d'Hermite et sa démonstration**
> Lorsque les coefficients de quatre termes consécutifs d'une équation forment une progression arithmétique, l'équation a nécessairement des racines imaginaires.

N'ayant pas été primée par le jury du Grand concours, la copie de Charles Hermite n'a pas été publiée dans les *Nouvelles Annales* et il ne nous est donc pas possible de connaître la démonstration exacte qu'il a proposée. Toutefois, deux démonstrations, basées essentiellement sur le même principe sont présentées dans les *Nouvelles Annales* et permettent donc de se faire une idée des arguments possiblement mis en avant par Hermite.

Commençons par présenter la preuve d'Adrien Guilmin, normalien de la promotion 1836. Il publie dans les *Nouvelles Annales* à propos de « Conséquences de la règle des signes de Descartes » contenant notamment une preuve de la règle d'Hermite [Guilmin 1846]. Après avoir rappelé la règle des signes de Descartes, Guilmin démontre dans son article le résultat classique qui affirme que toute équation polynomiale présentant deux coefficients successifs nuls admet des racines imaginaires[10]. Une fois ce résultat prouvé, il en déduit alors une règle différente de celle d'Hermite, quoique similaire :

> Si une équation $F(x) = 0$ a au moins trois coefficients consécutifs en progression géométrique, elle a des racines imaginaires.

La preuve de ce résultat est relativement immédiate : il est en effet facile d'observer que l'équation $(x - q)F(x) = 0$ (où q est la raison de la progression géométrique) admet deux coefficients successifs nuls. Cela prouve qu'elle

10. À l'époque, ce résultat est effectivement un résultat classique, présent dans la plupart des traités d'algèbre. Voir par exemple [Choquet & Mayer 1836, 397] ou [Lefébure de Fourcy 1835, 440]. Nous reproduisons ci-dessous la démonstration faite par Guilmin dans les *Nouvelles Annales* qui reprend essentiellement les mêmes idées que les traités de Choquet et Mayer et de Lefébure de Fourcy.

admet des racines imaginaires, et que par conséquent, l'équation $F(x) = 0$ en admet également.

À ce stade, Guilmin peut alors prouver la règle d'Hermite. Il considère ainsi une équation $F(x) = 0$ ayant au moins quatre coefficients consécutifs en progression arithmétique. Il multiplie alors l'équation par $x - 1$ et remarque qu'il obtient une équation dont trois termes successifs sont en progression géométrique. La règle précédente lui permet donc de conclure [Guilmin 1846, 339–340].

> **Quelques conséquences de la règle des signes de Descartes [Guilmin 1846, 334–335]**
> « Le nombre des racines imaginaires d'une équation $f(x) = 0$, dont le premier membre est incomplet[11], n'est jamais moindre que le plus grand nombre de variations que l'on peut introduire, en remplaçant les termes manquants par des termes ayant des signes arbitraires.
> [Preuve :] Soit V le nombre de variations du polynôme $F(x)$ obtenu en complétant $f(x)$ de manière à introduire le plus de variations possibles ; soit k le nombre de variations nouvelles ; alors $V = \nu + k$. Soit V' le nombre des variations de $F(-x)$, on sait que $V + V' = m$. Mais de quelque manière qu'on complète $f(x)$, la somme $V + V'$ relative aux polynômes complets obtenus, $F(x)$ et $F(-x)$, est toujours égale à m ; lors donc que V a sa plus grande valeur, ce qui est notre hypothèse, V' a sa plus petite valeur, laquelle est ν'. Puisque $V' = \nu'$, on a $V + \nu' = m$; remplaçant V par $\nu + k$, il vient $\nu + \nu' + k = m$, ou $k = m - (\nu + \nu')$. Or, on sait [d'après la règle des signes de Descartes] que $m - (\nu + \nu')$ est le minimum du nombre de racines imaginaires de l'équation $f(x) = 0$. On peut donc dire aussi que le nombre de racines imaginaires d'une équation $f(x) = 0$ n'est jamais moindre que le plus grand nombre de variations qu'il est possible d'introduire en complétant arbitrairement son premier membre. [. . .]
> *Conséquences 1. Dans toute équation à coefficients réels, s'il manque un terme entre deux termes de même signe, l'équation a au moins deux racines imaginaires.*
> *2. S'il manque deux termes entre deux termes de signes quelconques semblables, ou dissemblables, l'équation a au moins deux racines imaginaires.* »

Ainsi, nous voyons que Guilmin parvient à démontrer la règle d'Hermite tout en exhibant une autre règle, tout aussi particulière, et présentant un profil semblable. Quelques années plus tard, le professeur lyonnais de Virieu présente même un résultat plus général que la règle d'Hermite [Virieu 1865, 79–80]. Il

11. Une équation dont le premier membre est incomplet est simplement une équation polynomiale dont certains des coefficients sont nuls.

s'agit du résultat suivant[12], contenant de manière évidente la règle d'Hermite comme cas particulier :

> Une équation de la forme
>
> $$F(a)x^m + F(a+1)x^{m-1} + \ldots + F(a+r)x^{m-r} + \ldots + F(a+m) = 0,$$
>
> dans laquelle $F(a)$ désigne une fonction algébrique du degré $m-2$ au plus, a toujours des racines imaginaires.

Pour le démontrer, il considère l'équation

$$(x-1)^{m-s+1}F(x) = 0$$

qui a les mêmes racines imaginaires que l'équation $F(x) = 0$. Il explique ensuite pourquoi cette équation « renferme des termes consécutifs nuls en nombre $s \geq 2$ et peut alors conclure en utilisant le même résultat que celui utilisé par Guilmin. Ainsi, en considérant le cas $s = 2$, c'est-à-dire en multipliant $F(x)$ par $(x-1)^2$, la démonstration de de Virieu donne effectivement une preuve de la règle d'Hermite sur les équations dont les coefficients sont en progression arithmétique. En fait, le procédé utilisé par de Virieu pour la démonstration est très proche de celui de Guilmin étant donné qu'il consiste à multiplier une fois l'équation $F(x) = 0$ par $(x-1)^2$, là où Guilmin opérait en deux étapes, la multipliant successivement deux fois par $x-1$. L'intérêt de procéder en deux étapes est que cela permet de démontrer une autre règle, proche de celle d'Hermite, tandis que le fait de multiplier directement par le facteur $(x-1)^{m-s+1}$ permet d'obtenir un résultat plus général.

Au final, bien que nous ne connaissions pas la preuve avancée par Hermite dans le cadre du Grand concours, les deux démonstrations de Guilmin et de de Virieu donnent ainsi une idée du style de mathématiques que le résultat renferme. L'idée principale, consistant à multiplier l'équation initiale par un polynôme et d'étudier les conséquences que cela produit sur les coefficients de l'équation, est finalement assez proche du lemme de Segner, enseigné dans toutes les classes préparatoires du XIXe siècle. Et tout en étant un résultat nouveau, il est clair que la règle d'Hermite s'inscrit dans ce contexte bien particulier, en dehors duquel il n'est pas possible de comprendre comment un élève de classes préparatoires peut penser à démontrer un tel résultat. Cet exemple montre donc non seulement l'existence de liens entre recherche et enseignement au XIXe siècle, mais il illustre également le cadre dans lequel cela peut se produire : celui d'un concours portant sur un sujet très classique (la règle des signes de Descartes) et mobilisant les connaissances usuelles d'un élève de l'époque.

12. De Virieu répond à une question posée par Faure en 1864. Notons toutefois que la question de Faure ne spécifie aucune condition sur le degré de F et est manifestement fausse comme le note Fontené [Fontené 1916, 272].

3.3 La règle d'Hermite dans l'enseignement polytechnicien

L'anecdote autour de la règle d'Hermite ne se limite pas au simple fait qu'un élève de classes préparatoires démontre un résultat nouveau et que quelques articles paraissent ensuite de manière isolée dans un journal comme les *Nouvelles Annales*. Nous avons en effet retrouvé dans les papiers d'Abel Transon, professeur de classes préparatoires puis examinateur d'admission à l'École polytechnique, les traces d'un tel résultat[13]. Le brouillon en question contient l'énoncé du théorème ainsi qu'une brève phrase indiquant la démonstration. En tout état de cause, il s'agit de la même que celle proposée par de Virieu dans les *Nouvelles Annales*. Et Transon cite par ailleurs la généralisation de la règle d'Hermite établie par Terquem en 1843 (qui est un cas particulier du résultat de de Virieu).

Au vu de l'ensemble des éléments précédents, on peut raisonnablement dire que le résultat d'Hermite, accédant même au titre de « théorème » selon Transon, a circulé dans les milieux d'enseignement du XIXᵉ siècle. Ceci est même d'autant plus probable que certains commentateurs du début du XXᵉ siècle comme [*L'Enseignement mathématique* 1914, 352] ont pu rapporter que la connaissance d'un « théorème d'Hermite » relatif à la théorie des équations était exigé par les examinateurs du concours d'admission trente ou quarante ans auparavant. En définitive, la règle d'Hermite apparaît donc comme étant intéressante à deux égards : il s'agit d'un résultat nouveau démontré par un élève et il semble ensuite être intégré dans la formation polytechnicienne. À l'image du théorème de Sturm, il vient conforter à nouveau l'idée que le lien entre enseignement et recherche n'est peut-être pas tout à fait rompu dans les années 1840 et que des examens ou des concours sont aussi un lieu où des résultats nouveaux peuvent être établis, bien que cela semble peut-être paradoxal.

4 Le théorème de Laguerre

4.1 Un énoncé prenant diverses formes

En comparaison avec Sturm et Hermite, Edmond Laguerre a la particularité d'avoir présenté ses résultats relatifs aux équations numériques au moment où il était en poste à l'École polytechnique. Il a en effet rédigé ses articles dans les années 1870 et 1880 alors qu'il était répétiteur. En fait, les travaux de Laguerre sur les équations numériques font apparaître quelque chose de remarquable. Le « théorème de Laguerre » circule dans les milieux d'enseignement, en

13. Archives de l'École polytechnique, VI1b/2, dossier Abel Transon.

faisant notamment l'objet de publications dans les *Nouvelles Annales*[14] mais il n'est pas repris par tous les auteurs de la même façon. Le plus fréquemment, dans les *Nouvelles Annales*, il est énoncé sous la forme donnée par Laguerre lui-même[15] :

> Soit $f(x) = A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m$ un polynôme entier du degré m ; je considérerai la suite des polynômes
>
> $$\begin{aligned} f_m(x) &= A_0, \\ f_{m-1}(x) &= A_0x + A_1 \\ f_{m-2}(x) &= A_0x^2 + A_1x + A_2 \\ &\vdots \\ f_1(x) &= A_0x^{m-1} + A_1x^{m-2} + \ldots + A_{m-1} \\ f(x) &= A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m. \end{aligned}$$
>
> Si a est un nombre positif, le nombre de variations des termes de la suite
>
> $$f_m(a),\ \ f_{m-1}(a),\ \ f_{m-2}(a),\ \ \ldots\ \ f_1(a),\ \ f(a)$$
>
> est au moins égal au nombre de racines de l'équation qui sont supérieures à a, et, s'il est plus grand, la différence de ces deux nombres est un nombre pair. [Laguerre 1883, 102]

Ce résultat est par exemple repris par un des élèves d'Edmond Laguerre, Gabriel Candèze, polytechnicien de la promotion 1880. Dans [Candèze 1880], il compare notamment le théorème de Laguerre à la règle de Budan et de Fourier en montrant que le théorème de Laguerre est, bien que très utile en pratique, souvent moins efficace théoriquement. Au total, il y a même cinq articles des *Nouvelles Annales*, tous publiés en 1880, qui font référence au théorème de Laguerre considéré sous sa forme la plus fréquente.

Néanmoins, dans les *Nouvelles Annales*, certains auteurs parlent également du « théorème de Laguerre » pour désigner une application de ce résultat. C'est par exemple le cas de [Longchamps 1880]. Plus précisément, ces auteurs attribuent à Laguerre le fait d'avoir démontré que :

> Pour une équation $A_0x^m + A_1x^{m-1} + \ldots + A_{m-1}x + A_m = 0$, si N désigne la valeur absolue du plus grand coefficient négatif et

14. À en croire *L'Enseignement mathématique*, il semblerait le théorème de Laguerre ait, tout comme la règle d'Hermite, fait l'objet de questions au concours d'admission de l'École polytechnique dans les années 1880 [*L'Enseignement mathématique* 1914, 352].

15. Dans la suite de l'article, je citerai ce résultat en écrivant : « le théorème de Laguerre sous sa forme la plus fréquente ».

$A_0,\ A_1, \ldots, A_{p-1}$ les coefficients positifs qui précèdent le premier coefficient négatif, alors

$$1 + \frac{N}{A_0 + A_1 + \ldots + A_{p-1}}$$

est une limite supérieure des racines positives de l'équation.

Pourtant, cette règle n'apparaît dans aucun article des *Œuvres* de Laguerre. On peut faire l'hypothèse que cela résulte d'une pratique scolaire et que la deuxième forme du « théorème de Laguerre » a circulé dans les milieux de classes préparatoires, offrant une nouvelle règle aux élèves pour majorer les racines d'une équation. Cette règle ressemble d'ailleurs fortement à une autre règle, bien connue des élèves et des enseignants de classes préparatoires à l'époque, dite règle de Maclaurin, affirmant que la quantité $l = N + 1$ est une limite supérieure des racines, où N est, là aussi, la valeur absolue du plus grand coefficient négatif. De ce point de vue, le théorème de Laguerre peut donc apparaître comme une règle de Maclaurin améliorée[16].

Par ailleurs, si cette application du théorème de Laguerre semble adaptée à un contexte d'enseignement, il faut souligner que Laguerre ne s'est en revanche pas limité à ce type de travaux. Dans [Laguerre 1883], il présente en effet des résultats beaucoup plus généraux permettant, à l'instar du théorème de Sturm, de déterminer de manière exacte le nombre de racines contenues dans un intervalle donné. Il propose également d'étendre certaines méthodes de résolution aux équations transcendantes, en adaptant des résultats connus sur les équations polynomiales[17]. Ce type de travaux ne semblent néanmoins pas être repris par un journal comme les *Nouvelles Annales* et ils touchent sans doute des milieux plus académiques.

4.2 Le théorème de Laguerre dans le milieu polytechnicien

Le point intéressant est que le résultat permettant de déterminer de manière générale le nombre de solutions d'une équation s'appuie en fait, dans sa démonstration, sur le théorème de Laguerre sous sa forme la plus fréquente. Cela signifie que le théorème de Laguerre tel qu'il circule dans les milieux d'enseignement n'est en réalité qu'un résultat intermédiaire établi par Laguerre dans le cadre d'une théorie plus générale sur les équations numériques et à destination de milieux plus académiques. Ainsi, les travaux de Laguerre sur

16. Gohiere de Longchamps fait d'ailleurs une remarque en ce sens dans [Longchamps 1880].

17. Au XIX^e siècle, résoudre une équation transcendante revient en fait, en termes modernes, à rechercher ses zéros. Laguerre propose par exemple dans [Laguerre 1883] une nouvelle démonstration de la règle des signes de Descartes qui permet de généraliser son énoncé et la rend valable dans le cas des équations transcendantes.

les équations numériques circulent dans différents milieux et les résultats en question sont énoncés sous trois formes différentes, plus ou moins générales en fonction du public auquel ils sont destinés. J'ajouterai que cela est rendu possible par le fait que les travaux de Laguerre sont d'une nature très classique, tant par les objets mathématiques auxquels il s'intéresse que par les méthodes qu'il emploie. Les démonstrations sont en effet relativement élémentaires, utilisent des concepts bien souvent accessibles à tous les élèves de l'École polytechnique et assez proches des méthodes qu'apprenaient les candidats au cours d'admission de l'École polytechnique.

Je formulerai même l'hypothèse que la prise en compte du cadre d'enseignement dans lequel évolue Laguerre est primordiale pour comprendre pourquoi et comment il s'intéresse aux équations numériques. Le nombre important de publications de Laguerre lui-même ainsi que d'autres auteurs dans les *Nouvelles Annales* est un premier indicateur. Et le fait que Laguerre se soit intéressé au sujet des équations numériques précisément à partir du moment où il a dû utiliser ces notions dans un cadre d'enseignement, lorsqu'il a été nommé examinateur du concours d'admission en 1874, est également remarquable. De ces divers points de vue, considérer l'activité d'enseignement de Laguerre en relation avec son activité de recherche paraît pertinent. Elle permet en outre de comprendre pourquoi un mathématicien comme Laguerre se tient relativement éloigné des développements de l'algèbre abstraite telle qu'elle existe en Allemagne mais qu'il privilégie des résultats classiques, tout en étant nouveaux.

5 Les équations numériques dans la formation polytechnicienne : un premier bilan

En résumé, les résultats des trois répétiteurs Sturm, Hermite et Laguerre montrent bien qu'il existe des travaux relativement novateurs, nécessitant des prises d'initiatives de la part de leurs auteurs, qui se développent, en totalité ou en partie, en lien avec les milieux d'enseignement et plus particulièrement avec le cadre de formation polytechnicien. Une étude autour des équations numériques permet donc de nuancer l'idée selon laquelle il n'existerait plus aucun lien entre enseignement et recherche après 1830 à l'École polytechnique. Elle suggère également que ce lien a toutefois changé de forme. Alors qu'il s'établit auparavant dans le cadre du cours magistral donné par les professeurs, il passe ensuite, par exemple, par le biais de publications. Il peut aussi, dans le cas de la règle d'Hermite, de manière assez inattendue et sans doute beaucoup plus exceptionnelle, s'établir dans le cadre d'un concours dont le sujet semble *a priori* être extrêmement classique et ne pas devoir susciter de prises d'initiatives.

Au final, il est donc faux de dire que le déclin de l'École polytechnique est essentiellement dû à une rupture entre l'enseignement et la recherche en son sein. C'est même tout l'inverse que semble suggérer cette étude. À mon avis, un mathématicien comme Laguerre s'intéresse à des sujets plus classiques et à des théories moins novatrices justement à cause du lien existant entre enseignement et recherche. Il est en quelque sorte poussé à rechercher sur des sujets moins novateurs par le fait que cela lui permet de faire un lien avec son activité pédagogique. L'existence de programmes d'examens joue donc un rôle, que certains jugeront peut-être négatif, mais n'a, en tout cas, pas pour conséquence d'empêcher absolument les élèves de s'intéresser à des notions hors-programmes[18].

Bibliographie

Belhoste, Bruno [1998], Pour une réévaluation du rôle de l'enseignement dans l'histoire des mathématiques, *Revue d'histoire des mathématiques*, 4(2), 289–304, doi : 10.24033/rhm.77.

Bertrand, Joseph [1870], *Traité d'algèbre*, t. 3, Paris : Librairie Hachette et Cie.

Borowczyk, Jacques [1991], Sur la vie et l'œuvre de François Budan, *Historia mathematica*, 18(2), 129–157, doi : 10.1016/0315-0860(91)90496-K.

Candèze, Pierre Antoine Gabriel [1880], Sur une règle de M. Laguerre, *Nouvelles Annales de mathématiques*, série 2(t. 19), 307–309, www.numdam.org/item/NAM_1853_1_12___314_1/.

Chabert, Jean-Luc [2015], Sur la résolution numérique des équations, dans *Sciences mathématiques, 1750-1850, continuités et ruptures*, édité par Ch. Gilain & A. Guilbaud, Paris : CNRS Éditions, 475–507.

Choquet & Mayer [1832], *Traité élémentaire d'algèbre*, Paris : Bachelier.

—— [1836], *Traité élémentaire d'algèbre*, Paris : Bachelier.

Fontené, Georges [1916], Correspondance, *Nouvelles Annales de mathématiques*, série 4(t 16), 271–274, www.numdam.org/item/NAM_1916_4_16___271_1/.

Francinou, Serge, Gianella, Hervé *et al.* [2007], *Exercices de mathématiques, oraux X-ENS*, t. Algèbre 1, Paris : Cassini.

18. Pour plus de précisions sur l'ensemble des travaux de Sturm, d'Hermite, de Laguerre et sur les conclusions que j'en tire, on pourra consulter [Vincent 2019].

Gispert, Hélène [1996], Une comparaison des journaux français et italiens dans les années 1860-1875, dans *L'Europe mathématique*, édité par C. Goldstein, J. Gray & J. Ritter, Paris : Éditions de la Maison des sciences de l'homme, 391–406.

Goldstein, Catherine [2011], Charles Hermite's stroll through the Galois fields, *Revue d'histoire des mathématiques*, 17(2), 211–270, doi : 10.24033/rhm.161.

Guilmin, Adrien [1846], Conséquences de la règle des signes de Descartes, *Nouvelles Annales de mathématiques*, série 1(t. 5), 239–244, 334–340, www.numdam.org/volume/NAM_1846_1_5/.

Laffite, Pierre [1894], Auguste Comte, examinateur d'admission à l'École polytechnique, *Nouvelles Annales de mathématiques*, série 3(t. 13), 65–80, 113–120, 405–428, 462–482, www.numdam.org/volume/NAM_1894_3_13/.

Laguerre, Edmond [1883], Sur la théorie des équations numériques, *Journal de mathématiques pures et appliquées*, série 3(t. 4), 99–146, ark:/12148/bpt6k107447c.

Lefébure de Fourcy, Étienne Louis [1833], *Leçons d'algèbre*, Paris : Bachelier.

—— [1835], *Leçons d'algèbre*, Paris : Bachelier.

Longchamps, Gohiere de [1880], Théorème d'algèbre, *Nouvelles Annales de mathématiques*, série 2(t. 19), 71–74, www.numdam.org/item/NAM_1880_2_19___71_1.

Nabonnand, Philippe & Rollet, Laurent [2013], Un journal pour les mathématiques spéciales : les *Nouvelles Annales de mathématiques* (1842-1927), *Bulletin de l'Union des Professeurs de Spéciales*, 86, 5–18.

Serret, Joseph-Alfred [1849], *Cours d'algèbre supérieure*, Paris : Bachelier.

Sinaceur, Hourya [1991], *Corps et modèles : essai sur l'histoire de l'algèbre réelle*, Mathesis, Paris : Vrin.

Sturm, Charles François [1829], Analyse d'un mémoire sur la résolution des équations numériques, *Bulletin de Férussac*, 11, 419–422.

—— [1835], Mémoire sur la résolution des équations numériques, *Mémoires présentés par divers Savants étrangers à l'Académie royale des sciences, section Sciences mathématiques et physiques*, VI, 273–318.

Terquem, Olry [1842], Grand concours de 1842, *Nouvelles Annales de mathématiques*, série 1(t. 1), 352, www.numdam.org/item/NAM_1842_1_1___352_0/.

—— [1843a], Grand concours de 1843, *Nouvelles Annales de mathématiques*, série 1(t. 2), 374–376, www.numdam.org/item/NAM_1843_1_2__374_1/.

L'Enseignement mathématique [1914], Discussion sur la préparation mathématique des ingénieurs, *L'Enseignement mathématique*, 16, 328–355.

Vincent, Yannick [2019], *Les Répétiteurs de l'École polytechnique de 1798 à 1900*, Thèse de doctorat, École polytechnique & Université Claude Bernard Lyon 1.

Virieu, J. de [1865], Solution de la question 711 IV, *Nouvelles Annales de mathématiques*, série 2(t. 4), 79–80, www.numdam.org/item/NAM_1865_2_4__76_0.