Interpolation Polynômiale

Rémi Vaucher
Yannick Vincent

MG2 : Logiciel Scientifique
Semestre 1 2012/2013

Table des matières

1 Les polynômes interpolateurs de Lagrange

L'une des méthodes la plus connue pour l'interpolation polynômiale est celle de Lagrange. Cette méthode fut mise au jour par Euler, mais se base sur l'utilisation de polynômes créés par Lagrange, d'où son nom d'interpolation Lagrangienne. Nous définirons d'abord ces polynômes et quelques propriétés utiles qui nous amenerons a la méthode d'interpolation en question. Pour finir, nous verrons avec quelle précision cela nous permets d'approcher les fonctions voulues.

1.1 Définition et quelques propriétés utiles

Définition 1. *Soit* $(x_0, x_1, ..., x_n)$ $(n+1)$ *points de* $\mathbb{R}$. *On définit les polynômes :*

$$L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{X - x_j}{x_i - x_j}.$$

Ces polynômes définissent **les polynômes de Lagrange**.

Maintenant que nous avons définis les polynômes de Lagrange, voici une proposition qui nous sera bien utile pour caractériser le polynôme d'interpolationde Lagrange :

Lemme 1. *Les polynômes de Lagrange forment une base de* $\mathbb{R}_n(X)$.

Démonstration. Premièrement, constatons que :

$$L_i(x_j) = \delta_{ij}$$

où δ_{ij} est le symbole de Kronecker qui vaut 1 si $i = j$ et 0 sinon.

Maintenant, nous avons une famille $\{L_i(X)\}_{0 \le i \le n}$ de cardinal égal à $n + 1 = dim(\mathbb{R}_n(X))$. Il faut donc juste montrer que cette famille est libre.

Admettons qu'il existe $\{\lambda_i\}_{0 \le i \le n}$ tels que :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_i L_i(x) = 0, \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

En particulier, cela reste vrai pour $x = x_i, \ \forall 0 \le i \le n$. Mais, d'après l'observation plus haut :

$$\sum_{k=0}^{n} \lambda_i L_i(x_i) = \lambda_i = 0$$

Donc $\{L_i(X)\}_{0 \le i \le n}$ est une famille libre et donc une base de $\mathbb{R}_n(X)$ □

1.2 Interpolation de Lagrange

Replaçons notre problème, maintenant les définitions et propriétés posées.

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. Admettons que cette fonction ne soit connue qu'en $n+1$ points distincts, $(x_0, x_1, ..., x_n)$ de $[a, b]$. Le but est de trouver un polynôme $P(X)$ tel que :

$$P(x_i) = f(x_i), \ \forall 0 \le i \le n.$$

Théorème 1. *Soit* $(x_0, x_1, ..., x_n)$, $n + 1$ *points différents. Soit* f *telle que décrite dans le problème ci dessus. Il existe un unique polynôme* $P(X) \in \mathbb{R}_n(X)$ *tel que* $P(x_i) = f(x_i)$ *qui s'écrit sous la forme :*

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(X).$$

C'est le polynôme d'interpolation de Lagrange.

Démonstration. Comme nous l'avons vu plus haut, les polynômes de Lagrange forment une base de $\mathbb{R}_n(X)$. Donc $P(X)$ s'écrit de manière unique, pour certains p_i, comme :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} p_i L_i(X).$$

Et même, on obtient $P(x_i) = p_i, \ \forall 0 \le i \le n$. Mais $P(x - i) = f(x_i) = p_i$.

Donc on obtient :

$$P(X) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) L_i(X).$$

□

1.3 Exemple ludique

Nous allons maintenant présenter une petite application [1]. Auparavant, nous auron besoin de démontrer le lemme suivant :

Lemme 2. *Le produit de n entiers consécutifs est divisible par $n!$*

Démonstration. Pour le montrer, nous utiliserons les polynomes de Hilbert :

$$H_n(X) = \frac{X(X-1)....(X-n+1)}{n!}$$

On voit que la démonstration de ce lemme équivaut à montrer que $H_n(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
En fait, pour $k \in \mathbb{Z}$, on a

$$H_n(k) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq k \leq n-1, \\ \binom{n}{k} & \text{si } k \geq n, \\ (-1)^n \binom{n}{n-k-1} & \text{si } k \leq -1. \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, le produit des entiers $k, k+1, ..., k+n-1$ vaut $n! H_n(k-n+1)$ et est donc divisible par $n!$ □

Proposition 1. *Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$. Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\forall k \leq i \leq k+n$, $P(i) \in \mathbb{Z}$, alors $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.*

Démonstration. Commençons par remarquer que nous pouvons supposer que $k = 0$.
En effet, pour $P \in \mathbb{C}[X]$ vérifiant les hypothèses du théorème, on pose $Q(X) = P(X+k)$. on voit que $\forall 0 \leq i \leq n$, $Q(i) \in \mathbb{Z}$. Si on montre le résultat pour $k = 0$, on aura donc $Q(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$. Comme $P(\mathbb{Z}) = Q(\mathbb{Z})$, on en déduit que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

Ainsi, on supposera $k = 0$ pour le reste de la preuve.
D'après l'unicité du polynome interpolateur de Lagrange, on sait que $P(X) = \sum_{0 \leq i \leq n} P(i) L_i(X)$, où $L_i(X) = \prod_{0 \leq j \leq n, j \neq p} \frac{X-j}{i-j}$.
Pour montrer que $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$, il suffit de montrer que $\forall i, L_i(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.
En fait, $\forall p \in \mathbb{Z}, L_i(p) = \prod_{j \neq i} \frac{p-j}{i-j} = \frac{\prod_{0 \leq j \quad i-1} p-j}{i!} \times \frac{(-1)^{n-i} \prod_{i+1 \leq j \leq n} p-j}{(n-i)!}$
D'après le lemme précédent, on voit que $\frac{\prod_{0 \leq j \quad i-1} p-j}{i!} \in \mathbb{Z}$, et que $\frac{\prod_{i+1 \leq j \leq n} p-j}{(n-i)!} \in \mathbb{Z}$.
Ainsi, $L_i(p) \in \mathbb{Z}$ et le résultat est démontré. □

Remarque : Si de plus N divise $P(0), ..., P(n)$, on voit d'après l'expression $P(X) = \sum_{0 \leq i \leq n} P(i) L_i(X)$ que $\forall x \in \mathbb{Z}$, N divise $P(x)$.

Corollaire 1. *Si $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \geq 1$ tel que $P(0), P(1), ..., P(n^2) \in \mathbb{Z}$, alors $\forall k \in \mathbb{Z}$, on a $P(k^2) \in \mathbb{Z}$*

Démonstration. Il suffit d'appliquer la proposition précédente au polynome $Q(X) = P(X^2)$ qui est de degré $2n$ et prend des valeurs entières sur les $2n+1$ entiers :$-2n, ..., 0, ..., 2n$. □

1. exercice tiré de [7]

2 Polynômes d'interpolation et différences divisées.

Les polynômes de Lagrange tels que définis précédemment sont utile pour la théorie, mais reste très peu aisés a calculer. Nous allons donc les redéfinir grâce a a la formule de Newton qui fait intervenir la méthode des différences divisées.

Définition 2. *$f\lfloor\ldots\rfloor$ représente les différences divisées de f et est définie par :*
i)$f\lfloor x_i\rfloor = f(x_i)$
ii)$f\lfloor x_i,...,x_k\rfloor = \frac{f\lfloor x_i,...,x_k\rfloor - f\lfloor x_{i-1},...,x_{k-1}\rfloor}{x_k - x_0}$

Nous pouvons maintenant réécrire le polynome d'interpolation de f d'une manière plus calculatoire, c'est a dire sous la forme :

$$P_n(X) = a_0 \sum_{i=1}^{n} a_i \prod_{k=0}^{i-1} (X - x_i)$$

Théorème 2. *Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ et $P(X)$ son polynôme d'interpolation en $n+1$ points $(x_0,...,x_n)$ de $[a,b]$. Alors :*

$$P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} f\lfloor x_0,...,x_i\rfloor \prod_{k=0}^{i-1} X - x_k.$$

Démonstration. Procédons par récurrence sur le nombre de points d'interpolation.
Initialisation : cas $n = 1$
$P_1(X)$ est une droite, passant par $f(x_0)$ et $f(x_1)$. Donc :

$$P_1(X) = f(x_0) + (X - x_0)\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = f\lfloor x_0\rfloor + (X - x_0)\frac{f\lfloor x_1\rfloor - \lfloor x_0\rfloor}{x_1 - x_0}$$

Donc, le cas $n = 1$ est vrai.
Supposons que la propriété soit vraie au rang n, $P_n(X) = \sum_{i=0}^{n} f\lfloor x_0,...,x_i\rfloor \prod_{k=0}^{i-1} X - x_k$
On reconstitue le polynôme P_{n+1} à partir de P_n :

$$P_n(X) = P_{n-1}(X) + a_n \prod_{k=0}^{n-1} (X - x_k).$$

Il nous reste a montrer que $a_n = f\lfloor x_0,...,x_1\rfloor$.
Soit Q le polynôme d'interpolation de f aux points $(x_1,...,x_{n+1})$:

$$Q(X) = f\lfloor x_1\rfloor + \sum_{i=2}^{n+1} (\prod_{k=1}^{i-1} (X - x_k)) f\lfloor x_1,...,x_i\rfloor$$

On a que $P_n(x_i) = f(x_i),\ \forall 0 \le i \le n$ et $Q(x_i) = f(x_i),\ \forall 1 \le i \le n+1$. Donc $P_n(x_i) = Q(x_i),\ \forall 1 \le i \le n$.
On en déduit que :

$$P(X) = \frac{(x_{n+1} - X)P_n(X) - (x_0 - X)Q(X)}{x_{n+1} - x_0}$$

par unicité, vu que $P(x_i) = f(x_i),\ \forall 0 \le i \le n+1$, $P(X)$ est donc le polynôme d'interpolation de f en $(x_0,...,x_{n+1})$, c'est à dire $P_{n+1}(X)$.

Mais $P_{n+1}(X) = P_n(X) + a_n \prod_{i=0}^{n+1}(X - x_i)$.
On obtient donc que :

$$a_n = \frac{f\lfloor x_1, ..., x_{n+1}\rfloor - f\lfloor x_0, ..., x_n\rfloor}{x_{n+1} - x_0} = f\lfloor x_0, ..., x_{n+1}\rfloor .$$

□

3 A propos de la différence entre la fonction et les polynomes d'interpolation

3.1 Constante de Lebesgue

Cette définition nous sera utile pour étudier l'erreur commise entre les polynomes d'interpolation et la fonction f.
Pour des points $(x_i)_{0\leq i\leq n}$ fixés, on considère l'opérateur linéaire :

$$J_n : \begin{cases} \mathcal{C}([a,b]) \longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ f \longmapsto P_n \end{cases}$$

La norme subordonnée $|||J_n|||$ est reliée à la stabilité. En effet, pour toute $f \in \mathcal{C}([a,b])$, on a $||P_n|| \leq |||J_n|||.||f||$. Cela signifie qu'une "erreur faite sur f peut être plus ou moins amplifiée lors du calcul du polynome interpolateur, et que cela dépend de $|||J_n|||$.

Proposition 2. *La norme de l'opérateur $|||J_n|||$, appelée* **la constante de Lebesgue** *associé est égale à :*

$$\Lambda_n = \sup_{x\in[a,b]}(\sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|)$$

Démonstration. Soit $f \in \mathcal{C}([a,b])$ et P_n son polynome interpolateur aux points $x_0, ..., x_n$
On a $P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i)L_i(x)$ et donc $|P_n(x)| \leq (\sum_{i=0}^{n} |L_i(x)|)||f||$.
Ceci prouve que $|||J_n||| \leq \Lambda_n$.
Réciproquement, la continuité de L_i sur un segment implique qu'il existe $\zeta \in [a,b]$ tel que $\Lambda_n = \sum_{i=0}^{n} |L_i(\zeta)|$. On peut trouver $g \in \mathcal{C}([a,b])$, affine par morceaux, telle que $||g|| = 1$ et $g(x_i) = signe(L_i(\zeta)$, alors $J_n(f)(\zeta) = \Lambda_n$. Ainsi, l'inégalité $|||J_n||| \leq \Lambda_n$ est également vérifiée. □

3.2 Précision sur le théorème de Weierstrass

Théorème 3. *Théorème de Weierstrass*
Soit $a < b$ deux réels, soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Il existe une suite de polynômes $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

Nous pouvons raffiner un peu ce résultat en imposant certaines valeurs à ces polynomes :

Théorème 4. *Un théorème de Walsh*[2]
Soient $x_1, ..., x_n$ des points deux à deux distincts d'un segment $[a,b]$ et $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue. Il existe une suite de polynomes coïncidant avec f en chaque point x_k et qui converge uniformément vers f sur $[a,b]$.

2. exercice tiré de [6], p 130

Démonstration. On note $L_1, ..., L_n$ les n polynomes interpolateurs de Lagrange pour le système de points $(x_1, ..., x_n)$.
On considère $\epsilon > 0$. Il faut montrer qu'il existe $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P(x_k) = f(x_k) \forall k$ et $||f - P||_\infty < \epsilon$.
D'après le théorème de Weierstrass, il existe $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que et $||f - Q||_\infty < \epsilon$.
Il faut ensuite "corriger" la valeur de Q sur les x_k. Pour cela, on pose

$$L(X) = \textstyle\sum_{0 \le k \le n} (f(x_k) - Q(x_k)) L_k(X)$$
$$\text{et } P = Q + L$$

P coïncide bien avec f aux points x_k et en notant $M = \max_k ||L_k||_\infty$, on voit que $\Lambda_n \le nM$ et donc que $||f - P||_\infty \le ||f - Q||_\infty + ||L||_\infty \le (1 + nM)\epsilon$ où $1 + nM$ est une constante. □

Dans la preuve ci-dessus, c'est bien le fait qu'il n'y ait qu'un nombre fini de points qui permet de conclure car en effet, la constante de Lebesgue est finie. La question se pose alors lorsque nous considérons une suite de polynomes (P_n) telle que chaque polynome P_n interpole f en n points. Nous allons majorer la difference entre f et P_n en utilisant deux méthodes différentes. Une première inégalité fera intervenir les normes $\|f^{(n+1)}\|$ alors que la seconde dépendra de $d(f, \mathbb{R}_n[X])$ et de la constante de Lebesgue.

3.3 Estimation de l'erreur d'interpolation : première majoration

Pour estimer la précision de l'approximation de f par les polynomes interpolateurs, nous aurons besoin des lemmes suivants qui découlent du théorème de Rolle :

Lemme 3. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ au moins C^1 s'annulant en $n+2$ points distincts $(x_0, x_1, ..., x_{n+1})$ de $[a, b]$. Alors f' s'annule en $n+1$ points de $[a, b]$*

Démonstration. Simple application du théorème de Rolle sur $n + 1$ intervalles de la forme $]x_i, x_{i+1}[$. □

Lemme 4. *Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ au moins C^{n+1} s'annulant en $n+2$ points distincts $(x_0, x_1, ..., x_{n+1})$ de $[a, b]$. Alors, il existe $\xi \in [a, b]$ tel que $f^{(n+1)}(\xi) = 0$.*

Démonstration. On procède par récurrence comme suit :
- f s'annule en $n + 2$ points, donc f' s'annule en $n + 1$ points sur $[a, b]$.
- f' s'annule en $n + 1$ poins, donc f''s'annule en n points sur $[a, b]$.
- Par récurrence, on obtient que f^i s'annule en $n + 2 - i$ points. Donc $f^{(n+1)}$ s'annule en $n + 2 - n - 1 = 1$ point. □

On obtient alors la majoration suivante :

Théorème 5. *Soit $f \in C^{n+1}([a, b])$ de polynôme d'interpolation de Lagrange $P(X)$ aux points $(x_0, x_1, ..., x_n)$. Alors :*

$$\forall x \in [a, b], |f(x) - P(x)| \le \prod_{i=0}^{n} \frac{|x - x_i|}{(n + 1)!} \sup_{y \in [a,b]} |f^{(n+1)}(y)|.$$

Démonstration. Soit la fonction :

$$Q(y) = f(y) - P(y) - \prod_{i=0}^{n} \frac{y - x_i}{x - x_i} (f(x) - P(x)), \ \forall x \in [a, b].$$

La fonction Q s'annule en $n+2$ points, $(x, x_0, ..., x_n)$.

Donc $Q^{(n+1)}$ s'annule au moins une fois en un point $\xi \in [a,b]$. De plus, $P \in \mathbb{R}_n(X)$, on a donc :

$$0 = f^{(n+1)}(y) - \prod_{i=0}^{n} (n+1)!x - x_i(f(x) - P(x))$$

D'où :

$$|f(x) - P(x)| = |\prod_{i=0}^{n} \frac{x - x_i}{(n+1)!}||f^{(n+1)}(y)| \leq \prod_{i=0}^{n} \frac{|x - x_i|}{(n+1)!} \sup_{y \in [a,b]} |f^{(n+1)}(y)|$$

□

Proposition 3. [3] *Le polynome Π_{n+1} satisfait, pour une constante $C > 0$, à l'estimation*

$$||\Pi_{n+1}||_\infty \leq C(\tfrac{b-a}{\lambda})^{n+1}$$

où λ est donnée par :
a) $\lambda = 1$ pour des points quelconques
b) $\lambda = e$ pour les points équidistants
c) $\lambda = 4$ pour les points de Tchebyshev, c'est-à-dire $x_{i,n} = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}cos(\frac{(2i+1)\pi}{2n+2})$

Démonstration. a) Soit $x \in [a,b]$, $|x - x_i| \leq (b-a)$.
b) Soit $x \in [a,b]$, on pose $h = \frac{b-a}{n}$ de sorte que $x_i = a + ih$. De plus, on pose $s = \frac{x-a}{h}$.
On voit alors en factorisant chaque membre du produit que $\Pi_{n+1}(x) = \prod_i (x - a - ih) = h^{n+1} \prod_i (s - i)$.
Or, pour tout $s \in [0,n]$, $\prod_{i=0}^{n} |s - i| \leq n$. Ainsi,$||\Pi_{n+1}|| \leq (\frac{b-a}{n})^{n+1} n!$.
En utilisant ensuite l'équivalent de Stirling, on a $||\Pi_{n+1}|| \leq c(\frac{b-a}{n})^{n+1}(\frac{n}{e})^n\sqrt{2\Pi n} \leq C(\frac{b-a}{e})^{n+1}$.
c) On se rammène au cas où $a = -1$ et $b = 1$. Les points de Tchebyshev sont alors les racines du polynome de Tchebyshev T_{n+1}. Pour cela, pour $x \in [a,b]$, on considère $s \in [-1,1]$ tel que $x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}s$,

$$|\Pi_{n+1}(x)| = (\tfrac{b-a}{2})^{n+1} \prod_{i=0}^{n} |s - cos(\tfrac{(2i+1)\pi}{2n+2})| = (\tfrac{b-a}{2})^{n+1} 2^{-n} |T_{n+1}(s)|$$

En utilisant le fait que $||T_{n+1}|| = 1$, on obtient alors $||\Pi_{n+1}|| = 2(\frac{b-a}{4})^{n+1}$ □

Proposition 4. *Dans le cas des points equidistants, on a également la minoration suivante pour n suffisament grand :*

$$||\Pi_{n+1}|| \geq \tfrac{1}{n^{3/2}}(\tfrac{b-a}{e})^{n+1}$$

Démonstration. Il suffit d'estimer la fonction $s \longmapsto \prod_{i=0}^{n} |s - i|$ en $s = 1/2$ et d'utiliser l'équivalent de Stirling pour minorer $\Pi_{n+1}(1/2)$ et donc minorer $||\Pi_{n+1}||$. □

Sous certaines hypothèses, on voit que la suite de polynomes interpolateurs peut converger uniformément.

Théorème 6. *: Soit $f \in C^\infty([a,b])$. Soit $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une suite de points de $[a,b]$ deux à deux distincts.*
Si $\exists \lambda > 0$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}^*, ||f^{(n)}||_\infty \leq \lambda$, alors P_n converge uniformément vers f.

Il est possible d'appliquer ce théorème au cas de la fonction $x \longmapsto \frac{1}{x-\alpha}$ sur $[-1,1]$ [4].

3. Cette démonstration est tirée d'une leçon d'agreg [4]
4. une démonstration est présentée dans [3]

3.4 Estimation de l'erreur d'interpolation : seconde majoration

Théorème 7. *Polynome de meilleure approximation*
On munit l'espace vectoriel $\mathcal{C}([a,b])$ de la norme uniforme et de la distance associée

$$d(f,g) = ||f-g||.$$

On a donc

$$d(f,\mathbb{R}_n[X]) = inf_{P\in\mathbb{R}_n[X]}(||f-p||)$$

Il existe un unique polynome $Q_n \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$||f-Q_n|| = d(f,\mathbb{R}_n[X])$$

Ce polynome $Q_n n$ est appelé polynome de meilleure approximation de f à l'ordre n.

Démonstration. [5] Avec le polynôme nul, on voit que $d(f,\mathbb{R}_n[X]) \leq ||f||$.
De plus, $K = \{P \in \mathbb{R}_n[X]/||f-P|| \leq ||f||\}$ est un ensemble fermé et borné en dimension finie.
Par continuité de l'application $P \longmapsto ||f-P||$, on sait que l'inf est atteint. □

Théorème 8. *Pour toute $f \in \mathcal{C}([a,b])$, on*

$$||f-P_n|| \leq (1+\Lambda_n)d(f,\mathbb{R}_n[X]).$$

Démonstration. Soit Q_n le polynome de meilleure approximation uniforme de f.
On a $||f-Q_n|| = d(f,\mathbb{R}_n[X]$ et $J_n(Q_n) = Q_n$.
Ainsi, $f - J_n(f) = (f-Q_n) - J_n(f-Q_n)$ et donc
$||f-J_n(f)|| \leq ||f-Q_n|| + ||L_n(f-Q_n)|| \leq (1+\Lambda_n)d(f,\mathbb{R}_n[X])$ □

Remarque En fait, d'après le théorème de Weierstrass, $d(f,\mathbb{R}_n[X]) \to 0$ lorsque $n \to \infty$. Par ailleurs, la constante de Lebesgue diverge vers $+\infty$. . On peut montrer que c'est le cas quel que soit le choix des points $x_0, ..., x_n$. La question reste donc ouverte quant à la limite éventuelle du produit qui apparait dans la majoration du dernier théorème. Nous allons donc essayer de trouver une estimation de la constante de Lebesgue dans différents cas. [6]

3.4.1 Cas où les points x_i sont équidistants

Proposition 5. [7] *: Si les x_i sont équidistants, on a*

$$\tfrac{1}{4n^2}2^n \leq \Lambda_n \leq 2^n$$

Démonstration. Posons $x_i = a + ih, 0 \leq i \leq n$ et $x = a + sh$ avec $s \in [0,n]$ et $h = \frac{b-a}{n}$. Pour encadrer, Λ_n, il nous suffira d'encadrer chaque polynôme L_i. On a :

$$L_i(x) = \prod_{j\neq i}\frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)} = \prod_{j\neq i}\frac{s-j}{i-j} = (-1)^{n-i}\frac{s(s-1)...\widehat{(s-i)}...(s-n)}{i!(n-i)!}$$

5. Nous ne démontrerons pas l'unicité car elle n'est pas utile pour nous dans la suite de ce texte. Le lecteur interessé pourra consulter l'ouvrage [2], p 40

6. Les polynomes de Jackson donne une majoration de la convergence de $d(f,\mathbb{R}_n[X])$. On pourra se reporter à [2], p 44

7. On peut également démontrer que dans ce cas, on a $\Lambda_n \sim \frac{2^{n+1}}{enln(n)}$

où $\widehat{(s-i)}$ désigne le facteur omis.

Ainsi, $$\begin{aligned} |L_i(x)| &= \frac{\frac{1}{2}\frac{1}{2}\frac{3}{2}...\widehat{i-\frac{1}{2}}...(n-\frac{1}{2})}{i!(n-i)!} \\ &\geq \frac{1}{4}\frac{1\cdot 2\cdot ...\widehat{(i-1)}...(n-1)}{i!(n-i)!} \geq \frac{n!}{4n^2\cdot i!(n-i)!} \end{aligned}$$ En sommant sur i, on obtient bien la minoration attendue.

Pour la majoration : pour $x = a + sh$ avec $s \in [k, k+1]$, on a

$$|s-i| \leq \begin{cases} k+1-i & pour s \geq i \\ i-k-1 & pour s < i \end{cases}$$

Cela permet de conclure que $|L_i(x)| \leq \frac{(n-k)!(k+1)!}{i!(n-i)!} \leq \frac{n!}{i!(n-i)!}$ puis que $\Lambda_n \leq 2^n$. □

3.4.2 Cas où les points x_i sont les points d'interpolation de Tchebyschev

Pour simplifier les calculs, on se placera dans le cas où $[a,b] = [-1,1]$

Proposition 6. *Pour les points de Tchebyschev, il existe $C > 0$ telle que*

$$\Lambda_n \leq Cln(n)$$

Démonstration. On a $\Pi_{n+1}(x) = 2^{-n}T_{n+1}(x)$. De plus,

$$L_i(x) = \frac{\Pi_{n+1}(x)}{(x-x_i)\Pi'_{n+1}(x)} = \frac{T_{n+1}(x)}{(x-x_i)T'_{n+1}(x)}$$

On pose $x = cos\theta$, $x_i = cos\theta_i$, où $\theta_i = \frac{2i+1}{2n+2}\pi$, $(0 \leq i \leq n)$.
On a la relation : $T_{n+1}(cos(n+1)\theta$ qui devient après dérivation :

$$\sin\theta T'_{n+1}(\cos\theta) = (n+1)\sin(n+1)\theta$$

On en retire donc

$$T'_{n+1}(x_i) = (n+1)\frac{(-1)^i}{\sin\theta_i}$$
$$\text{et ainsi } |L_i(\cos\Theta)| = \frac{|\sin\theta_i\cos(n+1)\theta|}{(n+1)|\cos\theta - \cos\theta_i|}$$

Ensuite, nous allons minorer la quantité $\cos\theta - \cos\theta_i = sin\frac{\theta-\theta_i}{2}\sin\frac{\theta_i+\theta}{2}$:

Comme $\frac{theta-\theta_i}{2} \in [-\pi/2, \pi/2]$, on sait que $\sin(\frac{\theta-\theta_i}{2} \geq \frac{2}{\pi}\frac{|\theta-\theta_i|}{2}$. De plus, comme

$$\frac{\theta+\theta_i}{2} \in [\frac{\theta_i}{2}, \frac{\theta_i+\pi}{2}] \text{ où } \frac{\theta_i}{2} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{\theta_i+\pi}{2}$$
$$\text{et on a } |\sin\frac{\theta+\theta_i}{2}| \geq \min(\sin\frac{\theta_i}{2}, \sin\frac{\theta_i+\pi}{2}) = min(\sin\frac{\theta_i}{2}, \cos\frac{\theta_i}{2}).$$

On voit également que

$$\sin\theta_i \leq 2min(\sin\frac{\theta_i}{2}, \cos\frac{\theta_i}{2})$$

On obtient alors avec le théorème des accroissements finis appliqués à cosinus :

$$|L_i(\cos\theta)| \leq \pi\frac{|cos(n+1)\theta|}{(n+1)|\theta-\theta_i|} \leq \pi$$

Fixons désormais $\theta \in [0,\pi]$. Soit θ_j le point le plus proche de θ. Si on note $h = \frac{\pi}{n+1} = \theta_{i+1} - \theta_i$. On a alors,

$$|\theta - \theta_j| \geq (|j-i|-1)h$$

Et on obtient ainsi,

$$\sum_i |L_i(\cos\theta_i)| \leq \frac{\pi}{(n+1)h} \sum_{j\neq i,i+1,i-1} \frac{1}{|j-i|-1} + 3\pi$$

D'où

$$\Lambda_n \leq 2\sum_0^n \frac{1}{k} + 3\pi \leq Cln(n)$$

□

Théorème 9. *(admis) Dans le cas des points de Tchebyshev, on a*

$$\Lambda_n \sim \frac{2}{\pi}\ln(n)$$

De plus, c'est le meilleur équivalent possible, c'est-à-dire que pour toute autre répartition de points, la constante de Lebesgue sera supérieure ou égale à cet équivalent.

4 Phénomène de Runge

Nous voyons d'après la partie précédente et les équivalents obtenus qu'il est difficile de concevoir un théorème garantissant la convergence des polynomes d'interpolations quelle que soit la fonction f. En fait, il existe des contre-exemples. Parfois, on peut observer des oscillations lorsque le nombre de points d'interpolation augmente. Il s'agit du phénomène de Runge. Nous avons utilisé le logiciel Maple pour illustrer ce phénomène en prenant pour exemple la fonction dite "de Runge"$f_\alpha : x \longmapsto \frac{1}{\alpha^2+x^2}$ sur $[-1,1]$ $(\alpha \neq 0)$ et la suite de points $x_i = -1 + \frac{2i}{n}$.

Il est possible de montrer qu'il existe α_0 tel que pour $\alpha \leq \alpha_0$, les polynomes P_n ne convergent pas simplement vers f.[8] Dans ce texte, nous nous contenterons d'un résultat plus simple.

Proposition 7. *Avec les notations précédentes, pour un paramète α suffisament petit, les polynomes d'interpolations P_n ne convergent pas uniformément vers f_α sur $[-1,1]$.*

Démonstration. Nous allons calculer la différence $f_\alpha - P_n$.
L'erreur est donnée par $f_\alpha(x) - P_n(x) = \frac{1}{\alpha^2+x^2} - P_n(x) = \frac{1-(x^2+\alpha^2)P_n(x)}{\alpha^2+x^2}$.
Le numérateur est un polynome de degré $\leq n+2$ qui s'annule aux points $x_0, ..., x_n$. Ainsi, il est divisible par $\prod_j (x - x_j)$ et le quotient est de degré 0 ou 1.
De plus, on remarque que P_n est paire (car les points x_i sont répartis symétriquement par rapport à 0), et que Π_{n+1} est paire si n est impair (elle est impaire sinon). Ainsi,

$$1 - (x^2+\alpha^2)P_n(x) = \begin{cases} a\Pi_{n+1}(x) & \text{si n est impaire} \\ bx\Pi_{n+1}(x) & \text{si n est pair} \end{cases}$$

En évaluant les expressions en $x = i\alpha$, on obtient $a = \frac{1}{\Pi_{n+1}(i\alpha)}$ et $b = \frac{1}{i\alpha\Pi_{n+1}(i\alpha)}$. Finalement, la différence est donnée par :

$$f_\alpha(x) - P_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2+\alpha^2}\frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi_{n+1}(i\alpha)} & \text{si n est impair,} \\ \frac{x}{i\alpha(x^2+\alpha^2)}\frac{\Pi_{n+1}(x)}{\Pi_{n+1}(i\alpha)} & \text{si n est pair.} \end{cases} \quad (1)$$

Il nous faut maintenant minorer cette différence afin de montrer qu'il n'y a pas convergence uniforme. Nous savons que

8. Une démonstration relativement longue est détaillée dans l'ouvrage [2], p37/38

$$\Pi_{n+1}(x) \geq \frac{1}{n^{3/2}} \times (\frac{2}{e})^{n+1}$$

Par ailleurs, pour n impair, en majorant en module la moitié des termes du produit $\Pi_{n+1}(i\alpha)$ par α^2+1 et l'autre moitié par $\alpha^2+\frac{1}{4}$,[9] on obtient

$$\Pi_{n+1}(i\alpha) \leq ((\alpha^2+1)(\alpha^2+\frac{1}{4}))^{\frac{n+1}{2}}.$$

, Pour que $||f_\alpha - P_n|| \longrightarrow +\infty$, on remarque en remplaçant dans (1), qu'il suffit que

$$\frac{\frac{4}{e^2}}{(\alpha^2+1)(\alpha^2+\frac{1}{4})} > 1.$$

Par continuité, cette inégalité ayant lieu pour $\alpha = 0$, elle a également lieu pour α suffisament petit. Nous avons donc démontrer la divergence en norme pour ces parmètres α en question. □

5 Alternatives face au phénomène de Runge

[10]

5.1 Choix des x_i

Nous avons vu qu'un choix judicieux des points d'interpolation pouvait rendre la différence $f - P_n$ plus petite. Nous citerons le résultat suivant.

Théorème 10. [11] *Si $f \in \mathbb{C}^1([a,b])$, la suite des polynômes d'interpolation (P_n) de f aux points de Tchebyschev converge uniformément vers f sur $[a,b]$.*

5.2 Interpolation composée

En pratique, une autre méthode est également utilisée : celle de l'interpolation composée. Plus précisement, on décompose l'intervalle $[a,b]$ en sous intervalles $[a_i, a_{i+1}]$, c'est-à-dire

$$a = a_0 < a_1 < ... < a_n = b$$

Puis sur $[a_i, a_{i+1}]$, on se donne des points

$$a_i = x_0^i < ... < x_m^i = a_{i+1}.$$

A l'aide de ces points $(x_j^i)_{0 \leq j \leq m}$, on construit le polynome d'interpolation P_m^i de f en ces points. En raccordant les polynomes obtenus, on obtient une fonction polynomiale par morceaux $f_{n,m}$, où $f_{n,m}|_{[a_i,a_{i+1}]} = P_m^i$. Ainsi, $f_{n,m}|_{[a_i,a_{i+1}]}$ est une fonction polynomiale de degré m.
On en déduit le théorème suivant qui découle des résultats précédents :[12]

Théorème 11. *En gardant les notations introduites précédemment, si $f \in \mathcal{C}^{m+1}([a,b])$ alors on a l'estimation :*

9. Cette majoration se comprend bien en faisant un dessin
10. Et face au capitalisme ? ? ? Peut être... Une autre idée pourrait être d'approcher la fonction f par des polynomes non seulement égaux en certains points à f mais dont les dérivées successives coincideraient également. Il s'agit des polynômes de Hermite. Cependant, malgré le controle des premières dérivées successives, la formule de majoration reste la même qu'au théorème .... Nous avons donc choisit de ne pas développer en détail ce point. Le lecteur interessé pourra se réferer à l'ouvrage [1]
11. démontré dans le [5], p187
12. Résultat tiré de l'ouvrage [1]

$$\|f - f_{n,m}\|_\infty \leq \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\|f^{(m+1)}\|_\infty$$
$$\text{où } h = \max_{0\leq i\leq n} |a_{i+1} - a_i|$$

Remarque
L'avantage de cette formule étant que la quantité $\|f^{(m+1)}\|_\infty$ ne dépend pas du nombre de points n.

L'interpolation composée est souvent utilisée en pratique car elle évite le calcul de polynômes à des ordres trop élevés. On prendra généralement $m = 1$ ou $m = 2$. Par exemple, elle peut être très utile dans le cas du calcul d'intégrales numériques et permet d'obtenir des formules de quadrature.

Références

[1] Francis Filbet :*Analyse numérique*

[2] Jean Pierre Demailly : *Analyse numérique et équations différentielles*, Presses universitaires de Grenoble, 1996

[3] Michel Crouzeix, Alain Mignot : *Analyse numérique des équations différentielles*, Masson, Paris, 1984.

[4] Benjamin Boutin : *Interpolation polynomiale, agrégation, option modélisation*, Université Rennes 1 , 2011,
http ://perso.univ-rennes1.fr/benjamin.boutin/Docs/Interpolation2011.pdf

[5] Jean Etienne Rombaldi : *Interpolation et approximation, Analyse pour l'agrégation*, Vuibert,2005

[6] Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques, oraux x-ens, analyse 2*, Cassini, 2009

[7] Serge Francinou, Hervé Gianella, Serge Nicolas : *Exercices de mathématiques, oraux x-ens, algèbre 1*, Cassini, 2007