Affaire d'angles et de cocyclicité

Yannick Vincent

Février 2024

Table des matières

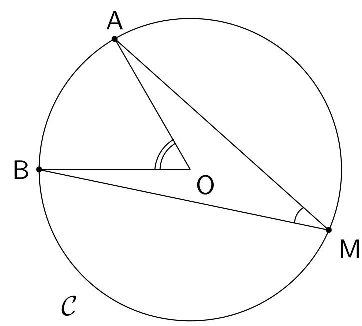
1 Angle au centre et angle inscrit

1.1 Angle au centre

Théorème 1

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de centre O. Soient A et B deux points de $\mathcal{C}$ et soit M un point du plan.

$$\mathrm{M} \in \mathcal{C} \iff \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}}\,;\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)\ [2\pi]\,.$$



Démonstration. Supposons que $\mathrm{M} \in \mathcal{C}$.
D'après la relation de Chasles pour les angles :

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}};\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}};\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}};\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \ [2\pi]$$

Or, comme les triangles OAM et OBM sont isocèles en O, on sait que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}};\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right) \equiv \pi - 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MO}};\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)\ [2\pi]$ et que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}};\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \equiv \pi - 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}};\overrightarrow{\mathrm{MO}}\right)\ [2\pi]$.
On en déduit alors que :

$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}};\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) &\equiv 2\pi - 2\left(\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}};\overrightarrow{\mathrm{MO}}\right) + \left(\overrightarrow{\mathrm{MO}};\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right)\right) \ [2\pi] \\ &\equiv -2\left(\overrightarrow{\mathrm{MB}};\overrightarrow{\mathrm{MA}}\right) \ [2\pi] \quad \text{(d'après la relation de Chasles)} \\ &\equiv 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}};\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \ [2\pi]\end{aligned}$$

Réciproquement, supposons que M est un point du plan tel que $\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}};\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}};\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right)\ [2\pi]$. On va montrer que $\mathrm{M} \in \mathcal{C}$. Notons pour cela O' le centre du cercle circonscrit au triangle MAB. Il suffit alors de montrer que $\mathrm{O} = \mathrm{O}'$.
En fait, d'après ce que nous avons prouvé précédemment, on sait que :

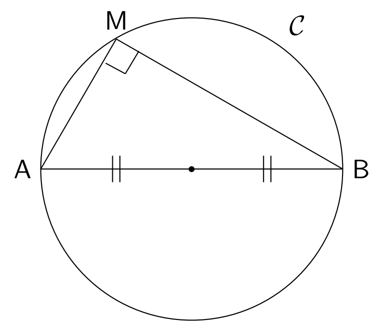
$$\begin{aligned}\left(\overrightarrow{\mathrm{O'A}};\overrightarrow{\mathrm{O'B}}\right) &\equiv 2\left(\overrightarrow{\mathrm{MA}};\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \ [2\pi] \\ &\equiv \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}};\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)\end{aligned}$$

Ainsi, comme les triangles OAB et O'AB sont isocèles respectivement en O et O', qu'ils ont même base et même angle au sommet, on en déduit que O=O'. Le point M est donc bien sur le cercle $\mathcal{C}$. □

Corollaire 2

Soit $\mathcal{C}$ un cercle de diamètre [AB] et soit M un point du plan.

$$\mathrm{M} \in \mathcal{C} \iff \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}};\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \ [\pi].$$



Démonstration. Il suffit d'appliquer le théorème 1 et de voir que si O est le centre du cercle, $\left(\overrightarrow{OA};\overrightarrow{OB}\right) \equiv \pi \;\; [2\pi]$ [1]. □

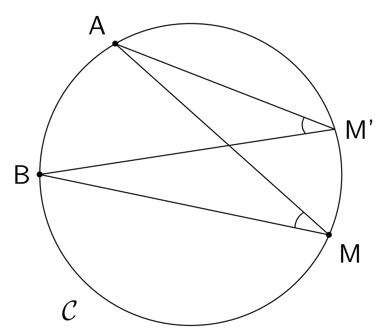
1.2 Angle inscrit et cocyclicité

On déduit également du théorème 1 le fait que, dans un cercle, deux angles interceptant le même arc sont égaux. Plus précisément :

Corollaire 3

Soit ABM un triangle non plat et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit M′ un point du plan distinct de A et de B.

$$\mathrm{M'} \in \mathcal{C} \iff \left(\overrightarrow{\mathrm{M'A}};\overrightarrow{\mathrm{M'B}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\mathrm{MA}};\overrightarrow{\mathrm{MB}}\right) \;\; [\pi] \,.$$



Démonstration. En notant O le centre du cercle circonscrit, et d'après le théorème

1. Il est possible de démontrer ce résultat en utilisant le calcul vectoriel et le produit scalaire. On montre en fait que le cercle $\mathcal{C}$ est l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{\mathrm{MA}}.\overrightarrow{\mathrm{MB}} = 0$. Il s'agit d'ailleurs de la démonstration indiquée dans le programme de spécialité de première générale.

1 :

$$\begin{aligned} M \in \mathcal{C} &\iff \left(\overrightarrow{OA}\,;\overrightarrow{OB}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi] \\ &\iff 2\left(\overrightarrow{M'A}\,;\overrightarrow{M'B}\right) \equiv 2\left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)\ [2\pi] \\ &\iff \left(\overrightarrow{M'A}\,;\overrightarrow{M'B}\right) \equiv \left(\overrightarrow{MA}\,;\overrightarrow{MB}\right)\ [\pi] \end{aligned}$$

□

Le résultat précédent peut se reformuler de manière équivalente de la façon suivante :

Théorème 4

Soient A, B, C et D quatre points distincts du plan. Les points A, B, C et D sont cocycliques si, et seulement, si

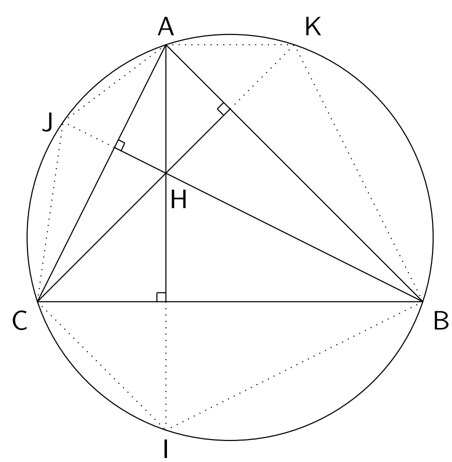
$$\left(\overrightarrow{CA}\,;\overrightarrow{CB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{DA}\,;\overrightarrow{DB}\right)\ [\pi]\,.$$

2 Application à quelques problèmes de géométrie

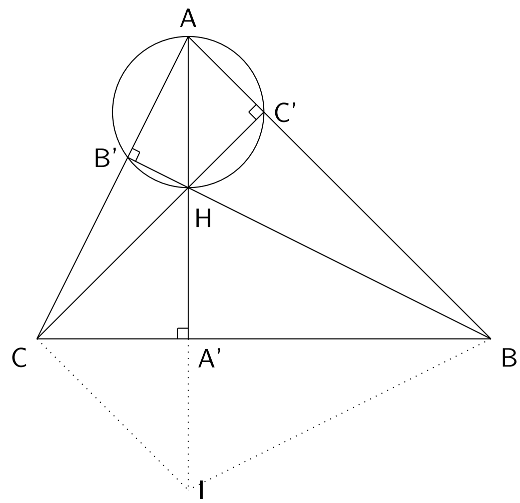
2.1 Symétriques de l'orthocentre par rapport aux côtés du triangle

Théorème 5

Soit ABC un triangle. On note H son orthocentre et I, J et K les symétriques respectifs de H par rapport aux côtés [BC], [AC] et [AB]. Les points I, J et K appartiennent au cercle circonscrit au triangle ABC.



Démonstration. Soit ABC un triangle d'orthocentre H et I le symétrique de H par rapport à [BC]. Pour montrer que I appartient au cercle circonscrit au triangle ABC, il s'agit de montrer que les points A, B, C et I sont cocycliques. D'après le théorème 4, il suffit donc de montrer que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)\ [\pi]$.



Pour cela, on note B' la base de la hauteur issue de B et C' la base de la hauteur issue de C. Comme les triangles AHB' et AHC' sont rectangles respectivement en B' et en C', on sait, d'après le théorème 2, que les points B' et C' appartiennent au cercle de diamètre [AH]. Par conséquent, les points A, H, B' et C' sont cocycliques. D'après le théorème 4, cela signifie que $\left(\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AC'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{HB'};\overrightarrow{HC'}\right)\ [\pi]$.
En utilisant l'alignement des points A, B' et B d'une part et des points A, C' et C d'autre part, on en déduit que $\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AB'};\overrightarrow{AC'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{HB'};\overrightarrow{HC'}\right)\ [\pi]$.
Enfin, comme les angles $\left(\overrightarrow{HB'};\overrightarrow{HC'}\right)$ et $\left(\overrightarrow{HC};\overrightarrow{HB}\right)$ sont opposés par le sommet et que I est le symétrique de H par rapport à [BC] (HBIC est un losange), on en déduit que :

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{HB'};\overrightarrow{HC'}\right) \equiv \left(\overrightarrow{HC};\overrightarrow{HB}\right) \equiv \left(\overrightarrow{IB};\overrightarrow{IC}\right)\ [\pi].$$

Cela donne bien l'égalité souhaitée. □

2.2 Autres exemples

Une quantité d'autres résultats peuvent se démontrer à l'aide des théorèmes de l'angle au centre et de l'angle inscrit ou de l'un de leurs corollaires. Nous en listons quelques-uns ci-dessous. Les démonstrations sont laissées en guise d'exercice.

Théorème 6 – Droite de Simson

Soit un triangle ABC, M un point du plan et U, V et W les projetés orthogonaux de M sur les droites (BC), (AC) et (AB). Le point M est sur le cercle circonscrit au triangle si, et seulement si, U, V et W sont alignés. Dans ce cas, la droite portant les points U, V et W s'appelle la droite de Simson.

Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Les bissectrices des angles $\widehat{A}$, $\widehat{B}$ et $\widehat{C}$ coupent respectivement $\mathcal{C}$ aux points D, E et F. Les droites (AD) et (EF) sont alors perpendiculaires.

Soit ABCD un carré, γ le cercle de centre B passant par A et δ le demi-cercle de diamètre [AB] intérieur au carré. Soit E un point de δ et F le point d'intersection de (BE) et du cercle γ. Alors,

$$\left(\overrightarrow{AD};\overrightarrow{AF}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AF};\overrightarrow{AE}\right)\ [2\pi].$$

Théorème 7

Soit ABC un triangle non rectangle. L'orthocentre du triangle est l'unique point M tel que $\left(\overrightarrow{MB};\overrightarrow{MC}\right) \equiv \left(\overrightarrow{AC};\overrightarrow{AB}\right)\ [\pi]$ et $\left(\overrightarrow{MC};\overrightarrow{MA}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BA};\overrightarrow{BC}\right)\ [\pi]$.

3 Cocyclicité et nombres complexes

Il est possible d'utiliser les nombres complexes pour traduire les théorèmes de l'angle au centre et de l'angle inscrit. Cela permet de résoudre plus efficacement certains problèmes. C'est ce que nous allons voir avec quelques exemples, en commençant par le théorème de Ptolémée [2].

3.1 Théorème de Ptolémée

Ptolémée Soit ABCD un quadrilatère convexe. Les points A, B, C et D sont cocycliques si, et seulement si,

$$\mathrm{AC} \times \mathrm{BD} = \mathrm{AB} \times \mathrm{CD} + \mathrm{AD} \times \mathrm{BC}.$$

Démonstration. Comme ABCD est convexe, montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques revient à démontrer que

$$\left(\overrightarrow{AB};\overrightarrow{AD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CB};\overrightarrow{CD}\right) + \pi\ [2\pi].$$

Pour prouver une telle égalité, on va utiliser les complexes. On note ainsi a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D. On a alors $\mathrm{AC} \times \mathrm{BD} = |c-a||d-b|$,

2. Ces théorèmes peuvent également être démontrés en utilisant le concept d'inversion. Pour une présentation des inversions voir Michèle Audin, géométrie, page 94-109.

$AB \times CD = |b-a||d-c|$ et $AD \times BC = |d-a||c-b|$.
Or, on peut remarquer que :

$$(c-a)(d-b) = (b-a)(d-c) + (d-a)(c-b).$$

En posant, $z = (b-a)(d-c)$ et $z' = (d-a)(c-b)$, on voit que l'égalité $AC \times BD = AB \times CD + AD \times BC$. est équivalente à $|z+z'| = |z| + |z'|$. Il s'agit en fait du cas d'égalité de l'inégalité triangulaire et on en déduit donc que $\arg(z) \equiv \arg(z') \ [2\pi]$.
Autrement dit, cela est équivalent au fait que $\arg(b-a)(d-c) \equiv \arg(d-a)(c-b) \ [2\pi]$, ce qui s'écrit encore :

$$\arg\left(\frac{b-a}{d-a}\right) \equiv \arg\left(\frac{c-b}{d-c}\right) \ [2\pi].$$

En terme d'angles, cela équivaut à :

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{BC}\,;\overrightarrow{CD}\right) \ [2\pi].$$

Cette dernière est exactement équivalente à la relation souhaitée :

$$\left(\overrightarrow{AB}\,;\overrightarrow{AD}\right) \equiv \left(\overrightarrow{CB}\,;\overrightarrow{CD}\right) + \pi \ [2\pi].$$

□

3.2 Birapport

Définition 1 – Birapport

Soient a, b, c et d quatre nombres complexes deux à deux distincts. On appelle birapport du quadruplet (a, b, c, d) le complexe :

$$[a, b, c, d] = \frac{a-c}{a-d} \Big/ \frac{b-c}{b-d}.$$

Théorème 8

Soient A, B, C et D quatre points deux à deux distincts d'affixes respectives a, b, c et d. Les points sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, $[a, b, c, d] \in \mathbb{R}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned}
[a,b,c,d] \in \mathbb{R} &\iff \frac{a-c}{a-d} \Big/ \frac{b-c}{b-d} \in \mathbb{R} \\
&\iff \arg\left(\frac{a-c}{a-d} \Big/ \frac{b-c}{b-d}\right) \equiv 0\,[\pi] \\
&\iff \arg\left(\frac{a-c}{a-d}\right) - \arg\left(\frac{b-c}{b-d}\right) \equiv 0\,[\pi] \\
&\iff \arg\left(\frac{a-c}{a-d}\right) \equiv \arg\left(\frac{b-c}{b-d}\right)\,[\pi] \\
&\iff \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}}\,;\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\mathrm{BC}}\,;\overrightarrow{\mathrm{BD}}\right)\,[\pi] \\
&\iff \text{A, B, C et D sont cocycliques ou alignés (d'après le théorème 4)}
\end{aligned}$$

□

Le birapport permet donc de caractériser l'ensemble réuni des droites et des cercles du plan. Les deux dernières parties de l'article en donnent des exemples. On commencera ainsi par s'intéresser aux homographies du plan complexe avant de terminer par une jolie illustration du birapport : le théorème de Miquel.

3.3 Birapport et homographies

Définition 2 – Homographie

On appelle homographie toute fonction $f : \mathbb{C} \longmapsto \mathbb{C}$ de la forme $f(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$.

Théorème 9

1. Les homographies conservent le birapport.
2. L'image d'un cercle ou d'une droite par une homographie est un cercle ou une droite.

Démonstration.

1. Soit f une homographie de la forme $f(z) = \dfrac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}$ avec $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ tels que $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$. Soient z_1, z_2, z_3, z_4 des nombres complexes deux à deux

distincts dans l'ensemble de définition de f.

$$\begin{aligned}
[f(z_1), f(z_2), f(z_3), f(z_4)] &= \frac{f(z_1) - f(z_3)}{f(z_1) - f(z_4)} \Big/ \frac{f(z_2) - f(z_3)}{f(z_2) - f(z_4)} \\
&= \frac{\dfrac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta} - \dfrac{\alpha z_3 + \beta}{\gamma z_3 + \delta}}{\dfrac{\alpha z_1 + \beta}{\gamma z_1 + \delta} - \dfrac{\alpha z_4 + \beta}{\gamma z_4 + \delta}} \Big/ \frac{\dfrac{\alpha z_2 + \beta}{\gamma z_2 + \delta} - \dfrac{\alpha z_3 + \beta}{\gamma z_3 + \delta}}{\dfrac{\alpha z_2 + \beta}{\gamma z_2 + \delta} - \dfrac{\alpha z_4 + \beta}{\gamma z_4 + \delta}} \\
&= \frac{\dfrac{(\alpha\delta - \gamma\delta)(z_1 - z_3)}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_3 + \delta)}}{\dfrac{(\alpha\delta - \gamma\delta)(z_1 - z_4)}{(\gamma z_1 + \delta)(\gamma z_4 + \delta)}} \Big/ \frac{\dfrac{(\alpha\delta - \gamma\delta)(z_2 - z_3)}{(\gamma z_2 + \delta)(\gamma z_3 + \delta)}}{\dfrac{(\alpha\delta - \gamma\delta)(z_2 - z_4)}{(\gamma z_2 + \delta)(\gamma z_4 + \delta)}} \\
&= \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \Big/ \frac{z_2 - z_3}{z_2 - z_4} \\
&= [z_1, z_2, z_3, z_4]
\end{aligned}$$

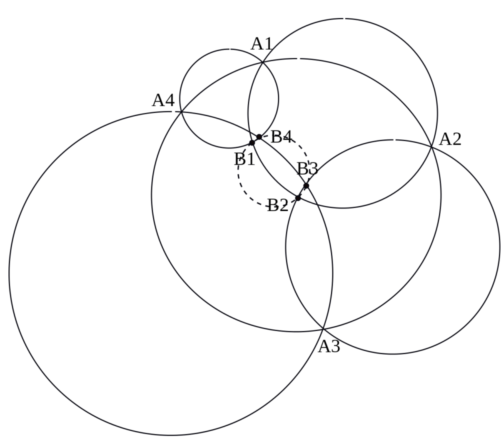
2. Il s'agit d'une conséquence immédiate du premier point et du théorème 8.

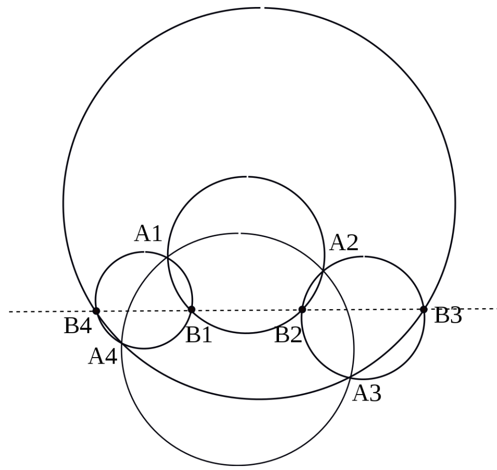
□

3.4 Théorème de Miquel

Théorème 10 – Miquel

Soient $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ quatre cercles. On suppose que $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$ se coupent en A_1 et B_1, que $\mathcal{C}_2$ et $\mathcal{C}_3$ se coupent en A_2 et B_2, que $\mathcal{C}_3$ et $\mathcal{C}_4$ se coupent en A_3 et B_3 et que $\mathcal{C}_4$ et $\mathcal{C}_1$ se coupent en A_4 et B_4. On suppose de plus que les huit points d'intersection obtenus sont deux à deux distincts.
Les points A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, B_1, B_2, B_3 et B_4 sont cocycliques ou alignés.





d'après Wikipédia, *Théorème de Miquel*

Démonstration. On note a_1, a_2, a_3 et a_4 les affixes respectives de A_1, A_2, A_3 et A_4. De même, on note b_1, b_2, b_3 et b_4 les affixes respectives de B_1, B_2, B_3 et B_4. On commence par remarquer que :

$$[b_1, b_3, b_2, b_4][b_3, a_2, b_2, a_3][b_3, a_4, a_3, b_4] = [a_1, a_3, a_4, a_2][b_1, a_2, b_2, a_1][b_1, a_4, a_1, b_4]. \quad (\star)$$

En effet, par définition des birapports :

$$\begin{aligned}
&[b_1, b_3, b_2, b_4][b_3, a_2, b_2, a_3][b_3, a_4, a_3, b_4] \\
&= \frac{\dfrac{b_1 - b_2}{b_1 - b_4}}{\dfrac{b_3 - b_2}{b_3 - b_4}} \times \frac{\dfrac{b_3 - b_2}{b_3 - a_3}}{\dfrac{a_2 - b_2}{a_2 - a_3}} \times \frac{\dfrac{b_3 - a_3}{b_3 - b_4}}{\dfrac{a_4 - a_3}{a_4 - b_4}} \\
&= \frac{(b_1 - b_2)(b_3 - b_2)(b_3 - a_3)(b_3 - b_4)(a_2 - a_3)(a_4 - b_4)}{(b_1 - b_4)(b_3 - a_3)(b_3 - b_4)(b_3 - b_2)(a_2 - b_2)(a_4 - a_3)} \\
&= \frac{(b_1 - b_2)(a_2 - a_3)(a_4 - b_4)}{(b_1 - b_4)(a_2 - b_2)(a_4 - a_3)}
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
&[a_1, a_3, a_4, a_2][b_1, a_2, b_2, a_1][b_1, a_4, a_1, b_4] \\
&= \frac{\dfrac{a_1 - a_4}{a_1 - a_2}}{\dfrac{a_3 - a_4}{a_3 - a_2}} \times \frac{\dfrac{b_1 - b_2}{b_1 - a_1}}{\dfrac{a_2 - b_2}{a_2 - a_1}} \times \frac{\dfrac{b_1 - a_1}{b_1 - b_4}}{\dfrac{a_4 - a_1}{a_4 - b_4}} \\
&= \frac{(a_1 - a_4)(b_1 - b_2)(b_1 - a_1)(a_3 - a_2)(a_2 - a_1)(a_4 - b_4)}{(a_1 - a_2)(b_1 - a_1)(b_1 - b_4)(a_3 - a_4)(a_2 - b_2)(a_4 - a_1)} \\
&= \frac{(b_1 - b_2)(a_3 - a_2)(a_4 - b_4)}{(b_1 - b_4)(a_3 - a_4)(a_2 - b_2)}
\end{aligned}$$

d'où l'égalité annoncée.
Or, dans l'égalité $(\star)$, les birapports $[b_3, a_2, b_2, a_3]$, $[b_3, a_4, a_3, b_4]$, $[b_1, a_2, b_2, a_1]$ et $[b_1, a_4, a_1, b_4]$ sont réels car les points correspondants sont cocycliques. On en déduit que $[a_1, a_3, a_4, a_2]$ est réel si, et seulement si, $[b_1, b_3, b_2, b_4]$ est réel. D'après le théorème 8, cela signifie exactement que les points A_1, A_2, A_3 et A_4 sont cocycliques ou alignés si, et seulement si, B_1, B_2, B_3 et B_4 le sont également. $\square$